

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editors: J. Ackeret E. Baumann P. Niggli P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler  
Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

|   |     |
|---|-----|
| BATSCHLET, E.: Über die numerische Auflösung von Randwertproblemen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen. . . . . | 165 |
| COLLATZ, L.: Zur numerischen Bestimmung periodischer Lösungen bei nichtlinearen Schwingungen. . . . .                           | 193 |
| LABHART, H.: Schallgeschwindigkeit in porösen Medien. . . . .   | 205 |
| PHASI, Y.: Bending of a Thin Elliptic Plate of an Orthotropic Material under Uniform Lateral Load. . . . .                      | 212 |

## Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

|  |     |
|--|-----|
| BECK, M.: Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes. . . . . | 225 |
| HENRICI, P.: Bergmans Integraloperator erster Art und Riemannsche Funktion. . . . .        | 228 |
| KURTH, R.: Zum Ergodenproblem. . . . .   | 232 |

## Varia - Miscellaneous - Divers

|  |     |
|--|-----|
| International Union of Pure and Applied Physics. . . . .             | 236 |
| International Contest. . . . .                                       | 236 |
| Österreichischer Mathematikerkongress. . . . .                       | 237 |
| Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik. . . . .    | 237 |
| Errata. . . . .  | 237 |
| Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques. . . . . | 238 |

|      |          |         |              |           |
|------|----------|---------|--------------|-----------|
| ZAMP | Vol. III | Fasc. 3 | Pag. 165-240 | 15. 5. 52 |
|------|----------|---------|--------------|-----------|

Verlag Birkhäuser Basel, Schweiz



Die numerische Auflösung des zweiten und des dritten Randwertproblems mit Hilfe der Differenzenmethode ist gegenüber dem ersten Randwertproblem bis jetzt stiefmütterlich behandelt worden. Wohl hat L. F. RICHARDSON [16] Beispiele dargeboten. Auf ein numerisches Verfahren sind aber erst F. WOLF [24] im Falle eines Stufenrandes und R. V. SOUTHWELL, G. VAISEY [20], [21] bei gekrümmtem Rand eingegangen. Die letztere Methode knüpft stark an mechanische Vorstellungen an, die jedoch beim gemischten Randwertproblem kaum mehr verwendet werden können. Neuerdings hat sich L. FOX [7], [8] mit den Differenzengleichungen, die sich in den Gitterrandpunkten ergeben, besonders beschäftigt. Doch blieb das Problem der Approximation bei gekrümmtem Rande noch offen.

In § 1 studieren wir zunächst den Übergang zu Differenzengleichungen von neuem, wobei wir der Approximation am Rande besondere Aufmerksamkeit schenken. Allerdings sehen wir uns gezwungen, Ecken und Spitzen am Rande auszuschliessen, sofern nicht gerade der einfache Fall eines Stufenrandes vorliegt. Die eigenartigen Schwierigkeiten, welche eine Unstetigkeit der Tangente erzeugt, kommen in Abschnitt 8 zur Sprache.

Wir geben auch in § 1 hinreichende Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit von Gitterlösungen, das heisst der Lösungen des dem gegebenen Problem zugeordneten Systems von Differenzengleichungen. Wir erwähnen hier nur nebenbei, dass man, von unseren Ergebnissen ausgehend, sehr wahrscheinlich entsprechende Existenz- und Unitätssätze für Differentialgleichungen beweisen könnte, wie solche von R. COURANT, K. FRIEDRICHS, H. LEWY [5] im Falle von Randbedingungen erster Art hergeleitet worden sind.

Über den beim Differenzenverfahren begangenen *Abbrechfehler* (truncation error), das heisst über die Differenz zwischen der Gitterlösung und der gesuchten kontinuierlichen Lösung, hat S. GERSCHGORIN [10] im Falle des ersten Randwertproblems gezeigt, dass dieser Fehler bei Verfeinerung des Gitters mindestens proportional zur Gitterseite  $h$  gegen Null strebt. L. COLLATZ [1] hat anschliessend dargetan, dass eine bessere Anpassung der Randwerte durch Interpolation die Konvergenz wesentlich verbessert, so nämlich, dass der Fehler mit  $h^2$  gegen Null strebt. Ein solches Ergebnis war schon früher erwartet worden, wie Andeutungen von L. F. RICHARDSON [16] und von C. RUNGE [17] zeigen.

In § 2 werden wir eine Fehlerabschätzung für den Fall von Randbedingungen dritter Art sowie auch für gemischte Randbedingungen vornehmen. Wir modifizieren und erweitern hiezu die von S. GERSCHGORIN [10] ersonnene Majorantenmethode. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen, wobei wir Eigenwertprobleme ausschliessen. In Satz 1 (§ 2, Abschnitt 14) sagen wir aus, dass bei dem von uns vorgeschlagenen numerischen Verfahren der Abbrechfehler proportional zur Gitterseite  $h$  gegen Null strebt. Anschliessend daran

diskutieren wir die Massnahmen, die man zur Konvergenzbeschleunigung zu treffen hat. Unser Vorgehen ist an allerlei einschränkende Voraussetzungen gebunden, welche in erster Linie die Existenz einer eindeutigen Lösung mit gewissen Stetigkeitseigenschaften sicherzustellen haben. Immerhin ist zu erwarten, dass das Differenzenverfahren auch in allgemeineren Fällen brauchbare numerische Resultate liefert, wie praktische Erfahrungen zeigen. Doch wird der Konvergenzgrad im allgemeinen geringer sein.

Schliesslich gehen wir in § 3 auf die numerische Auflösung des zugeordneten Systems von Differenzengleichungen genauer ein. Wir studieren ein alternierendes Verfahren, das als eine Erweiterung des Southwellschen Relaxationsverfahrens aufgefasst werden kann. In Satz 2 (Abschnitt 18) zeigen wir, dass dieses Approximationsverfahren für jedes feste Gitter konvergiert. In Abschnitt 19 folgt eine Diskussion der Konvergenzgeschwindigkeit. Beim Beweis von Satz 2 machen wir ausgiebig von den *Greenschen Zahlen* Gebrauch, welche wir weiter vorne, in Abschnitt 6, einführen. Die Arbeit schliesst mit dem Studium der unvermeidlichen *Abrundungsfehler*.

## § 1. Das der Differentialgleichung und den Randbedingungen entsprechende System von Differenzengleichungen

1. Es bezeichne  $G$  ein beschränktes, einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet der reellen  $(x, y)$ -Ebene. Der Rand  $C$  des Gebietes soll frei von Doppelpunkten, Ecken und Spitzen sein, also überall eine stetige Tangente besitzen.

Gesucht ist eine Funktion  $v = v(x, y)$ , welche in  $G$  der normierten<sup>1)</sup> elliptischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c v = g \quad (1.1)$$

genügt und auf  $C$  die Randbedingung

$$k(s) \frac{\partial v}{\partial n} - h(s) v = f(s) \quad (1.2)$$

bei nach innen gerichteter Normale erfüllt.

Wir setzen voraus, dass die Koeffizienten  $a, b, c, g$  in (1.1) solche beschränkte Funktionen von  $x$  und  $y$  und  $k(s), h(s), f(s)$  in (1.2) solche beschränkte Funktionen eines auf  $C$  erklärten Parameters sind, dass das Problem eine eindeutig bestimmte Lösung  $v(x, y)$  besitzt, die im Innern und auf dem Rand von  $G$  samt

<sup>1)</sup> Über die Transformation der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung auf die Normalform siehe etwa COURANT-HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. 2 (Springer, Berlin 1937), S. 123 ff.



ihren partiellen Ableitungen bis zur vierten Ordnung stetig ist<sup>1)</sup>. Die verlangten Stetigkeitseigenschaften sollen nicht verlorengehen, wenn  $g$  und  $f(s)$  durch eine gemeinsame, von Null verschiedene Konstante ersetzt werden<sup>2)</sup>. Unter allen Umständen soll im folgenden stets

$$c = c(x, y) \leq 0 \quad (1.3)$$

gelten. Ferner müssen wir für die Randbedingung die folgenden Annahmen machen:

Der Rand  $C$  zerfalle in zwei Teile  $C_1$  und  $C_2$ , wobei  $C_1$  und  $C_2$  aus endlich vielen Teilbögen bestehen können. Dann sei

$$k(s) = 1 \text{ auf } C_1, \quad k(s) = 0 \text{ auf } C_2 \quad (1.4)$$

und

$$h(s) \geq 0 \text{ auf } C_1, \quad h(s) = 1 \text{ auf } C_2. \quad (1.5)$$

Sollte die Menge der Randpunkte  $C_2$  leer und zugleich in allen inneren Punkten  $c(x, y) = 0$  sein, so verlangen wir über (1.5) hinaus, dass auf wenigstens einem Teilbogen von  $C$

$$h(s) > 0 \quad (1.6)$$

gilt.

In dem soeben formulierten Problem sind die folgenden Spezialfälle mit-enthalten:

- a) Das *Randwertproblem erster Art*, wenn nämlich  $C_1$  eine Nullmenge ist.
- b) Das *Randwertproblem dritter Art*, wenn  $C_2$  eine Nullmenge ist.
- c) Das aus Randbedingungen erster und zweiter Art hervorgehende *gemischte Problem*. Hier ist längs  $C_1$  die Normalableitung  $\partial v / \partial n$  und längs  $C_2$ , das keine Nullmenge ist, der Wert von  $v$  vorgegeben.

Das zweite Randwertproblem ist nur dann mitenthalten, wenn  $c(x, y)$  nicht in allen Punkten von  $G$  verschwindet. Denn sonst muss für die Existenz einer Lösung bekanntlich

$$\int_C \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0$$

vorausgesetzt werden.

<sup>1)</sup> Unter welchen Bedingungen für die Koeffizienten eine eindeutige Lösung mit den verlangten Stetigkeitseigenschaften existiert, sei hier nicht untersucht. Die Literatur über Existenzsätze für das dritte Randwertproblem findet man zusammengestellt im Artikel von L. LICHTENSTEIN *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 2, 3. 2, S. 1303–1305, oder im Artikel von W. STERNBERG in *PASCALS Repertorium der höheren Mathematik*, Bd. I, 3, 2. Aufl. (Teubner, Leipzig und Berlin 1929), S. 1139. Es ist dort üblich, die auch von uns gemachten Voraussetzungen (1.3) und (1.6) zugrunde zu legen. Doch wird die Stetigkeit der höheren als zweiten Ableitungen nicht verlangt. Auf der anderen Seite ist unser Problem mit Rücksicht auf die Anwendungen allgemeiner formuliert, indem  $k(s)$  auch den Wert Null annehmen darf.

<sup>2)</sup> Da die linken Seiten in (1.1) und (1.2) homogen in  $v$  sind, so ist die Wahl der Konstanten unwesentlich. In (13.1) wird sie gleich  $-1$  gesetzt.

2. Um (1. 1) mit der Randbedingung (1. 2) numerisch auflösen zu können, wenden wir das Differenzenverfahren an. Zu diesem Zweck legen wir in die  $(x, y)$ -Ebene ein *quadratisches Punktgitter* parallel zu den Koordinatenachsen<sup>1)</sup>. Die Seitenlänge, das heisst der Abstand zweier benachbarter Gitterpunkte, sei mit  $h$  bezeichnet. Den Rand  $C$  von  $G$  approximieren wir auf die folgende Weise durch einen von den Gitterpunkten gebildeten Streckenzug  $C'$  (Figur 1):

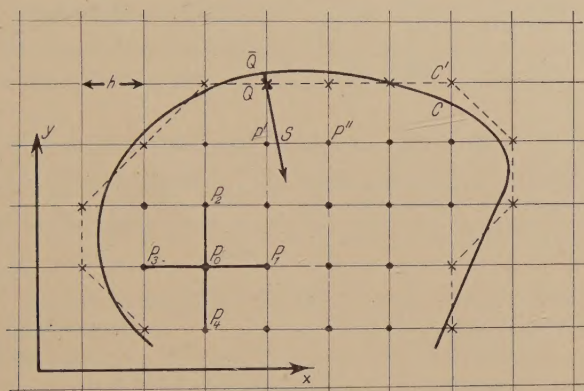


Fig. 1

Approximation des Gebietes  $G$  durch das Gittergebiet  $G'$ .

Von jeder Gitterseite, die von  $C$  geschnitten wird, ordne man den dem Schnittpunkt am nächsten liegenden Gitterpunkt dem Rande  $C'$  zu. Im Zweifelsfall bleibt die Wahl frei. Von einem so bestimmten Gitterrandpunkt kann man auf  $C$  ein Lot fallen, welches  $\leq h/2$  ist. Dies folgt unmittelbar aus der Voraussetzung, dass  $C$  überall eine stetige Tangente besitze.  $h$  sei dabei so klein gewählt, dass zu jedem Punkt auf  $C'$  nur ein einziges solches Lot existiert. Auf diese Weise wird jedem Punkt  $Q$  von  $C'$  eindeutig ein Punkt  $\bar{Q}$  von  $C$ , nämlich der Fusspunkt des Lotes, zugeordnet. Mit  $C'_1$  und  $C'_2$  bezeichnen wir die Mengen derjenigen Punkte von  $C'$ , denen ein Randpunkt von  $C_1$  bzw.  $C_2$  zugeordnet ist. Für hinreichend kleines  $h$  sind  $C'_1$  und  $C'_2$  nicht leer, wenn das Entsprechende für  $C_1$  bzw.  $C_2$  gilt.

Mit  $G'$  bezeichnen wir das von  $C'$  eingeschlossene Gittergebiet. Jeder innere Gitterpunkt ist dadurch ausgezeichnet, dass er die maximale Zahl von vier Nachbarn besitzt, die alle zum «abgeschlossenen» Gittergebiet  $G'$  gehören. Wir dürfen erwarten, dass  $h$  bereits so klein ist, dass die inneren Gitterpunkte von  $G'$  eine «zusammenhängende» Punktmenge bilden, und dass auch keine «Engpässe» existieren. In  $G'$  bilden wir nun Differenzenquotienten, welche

<sup>1)</sup> Gelegentlich eignen sich andere als quadratische Gitter besser. Wir verweisen hiezu auf R. V. SOUTHWELL [21].



die in (1. 1) und (1. 2) vorkommenden Differentialquotienten approximieren. Eine Gitterfunktion  $u(x, y)$  nehme in einem beliebigen Gitterpunkt  $P_0$  den Wert  $u_0$  und in den vier Nachbarpunkten  $P_1, P_2, P_3, P_4$  die Werte  $u_1, \dots, u_4$  an (Figur 1). Einige dieser Nachbarpunkte können auch Randpunkte sein. Unter den partiellen Differenzenquotienten erster und zweiter Ordnung verstehen wir dann wie üblich die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1 - u_3}{2h}, \quad \frac{u_1 - 2u_0 + u_3}{h^2} \quad \text{in der } x\text{-Richtung,} \\ \frac{u_2 - u_4}{2h}, \quad \frac{u_2 - 2u_0 + u_4}{h^2} \quad \text{in der } y\text{-Richtung.} \end{aligned} \right\} \quad (2. 1)$$

Ersetzt man in (1. 1) die Differentialquotienten durch die soeben eingeführten Differenzenquotienten, so lauten die zu (1. 1) analogen Differenzengleichungen

$$\frac{1}{h^2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0) + a \frac{u_1 - u_3}{2h} + b \frac{u_2 - u_4}{2h} + c u_0 = g,$$

wobei die Werte von  $a, b, c, g$  im Punkte  $P_0$  zu bestimmen sind. Daraus gewinnen wir durch Umformung

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{a h}{2}\right) u_1 + \left(1 + \frac{b h}{2}\right) u_2 + \left(1 - \frac{a h}{2}\right) u_3 \\ + \left(1 - \frac{b h}{2}\right) u_4 - (4 - c h^2) u_0 = h^2 g, \end{aligned} \right\} \quad (2. 2)$$

oder abkürzend die Differenzengleichungen

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 - \beta u_0 = \gamma. \quad (2. 3)$$

Hierin sind die Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta, \gamma$  gewisse Gitterfunktionen, welche wegen (2. 2) und (1. 3) den folgenden Bedingungen genügen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 4, \quad (2. 4)$$

$$\beta \geq 4. \quad (2. 5)$$

Es sei ausserdem  $h$  so klein angenommen, dass überall in  $G'$

$$\alpha_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2. 6)$$

gilt.

3. Um die Normalableitung passend approximieren zu können, sei  $Q$  ein beliebiger Gitterpunkt von  $C'$  und  $n = n(s)$  die durch  $Q$  gehende Kurvennormale von  $C$  (Figur 1). Durch sie wird, wie in Abschnitt 2 dargelegt worden ist, dem Gitterpunkt  $Q$  ein Punkt  $\bar{Q}$  der Kurve  $C$  zugeordnet. Folgt man der Kurvennormalen  $n$  ins Innere von  $G'$ , so schneidet sie die nächstfolgende Gitterseite in einem gewissen Punkt  $S$ .  $S$  ist im allgemeinen kein Gitterpunkt. Die

Endpunkte der Gitterseite, auf der  $S$  liegt, seien mit  $P'$  und  $P''$  bezeichnet. Bei hinreichend kleiner Gitterseite  $h$  ist mindestens einer dieser beiden Gitterpunkte ein innerer Punkt von  $G'$ .

Weiterhin sei der Abstand des Punktes  $S$  von  $Q$  mit  $\sigma h$  bezeichnet, wobei für  $\sigma$  offenbar

$$1 \leq \sigma \leq \sqrt{2} \quad (3.1)$$

gilt. Aus den Werten  $u'$  und  $u''$ , welche  $u(x, y)$  in den Punkten  $P'$  und  $P''$  annimmt, werde durch *lineare Interpolation* der Wert  $u$  in  $S$  gebildet, so dass also  $u$  die Gestalt

$$u = \lambda_1 u' + \lambda_2 u'', \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0 \quad (3.2)$$

hat (vgl. Figur 3 in Abschnitt 10). Mit  $U$  bezeichnen wir den Wert von  $u(x, y)$  in  $Q$ . Dann werde  $\partial v / \partial n$  im Punkte  $\bar{Q}$  durch den Differenzenquotienten

$$\frac{u - U}{\sigma h} \quad (3.3)$$

im Punkte  $Q$  approximiert.

Die Randbedingung (1. 2) wird daher im Punkte  $Q$  durch

$$k(s) \frac{u - U}{\sigma h} - h(s) U = f(s) \quad (3.4)$$

angenähert, wofür wir nach Multiplikation mit  $\sigma h$  auch

$$k(s) u - [k(s) + \sigma h h(s)] U = \sigma h f(s) \quad (3.5)$$

oder kurz

$$K u - H U = F \quad (3.6)$$

schreiben können. Darin bezeichnen  $K, H, F$  gewisse Gitterfunktionen auf dem Rand  $C'$ . Die zu ihrer Bestimmung im Randpunkt  $Q$  notwendigen Werte von  $k(s), h(s), f(s)$  sind in dem zugeordneten Punkt  $\bar{Q}$  zu berechnen.

An Stelle von (1. 4) tritt die Annahme

$$K = 1 \text{ auf } C'_1, \quad K = 0 \text{ auf } C'_2 \quad (3.7)$$

und an Stelle von (1. 5)

$$H = 1 + \sigma h h(s) \geq 1 \text{ auf } C'_1, \quad H = \sigma h > 0 \text{ auf } C'_2, \quad (3.8)$$

wobei für den Fall, dass  $C'_2$  eine Nullmenge ist,  $h$  so klein vorauszusetzen ist, dass für wenigstens einen Punkt von  $C'$

$$H > 1 \quad (3.9)$$

gilt.

4. Die Gleichungen (2. 3) und (3. 6) fassen wir zu einem System zusammen, wobei wir gleichzeitig für die Linearformen linker Hand abkürzende Bezeichnungen einführen:

$$\left. \begin{aligned} l(u) &\equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 - \beta u_0 = \gamma, \\ L(U) &\equiv K u - H U = F. \end{aligned} \right\} \quad (4. 1)$$

Hierin verwenden wir grosse Buchstaben nur für solche Grössen, die sich auf den Rand  $C'$ , kleine Buchstaben aber für Grössen, die sich vorzugsweise auf das Innere von  $G'$  beziehen.

Bezeichnet  $N$  die Anzahl aller Gitterpunkte von  $G'$  mit Einschluss des Randes  $C'$ , so bilden die Gleichungen (4. 1) ein System von genau  $N$  linearen Gleichungen mit den  $N$  Unbekannten  $u(x, y)$ .

Dieses System besitzt unter den Bedingungen (2. 4), (2. 5), (2. 6), (3. 7), (3. 8), (3. 9) eine Reihe wichtiger Eigenschaften, die wir in den folgenden Hilfsätzen zusammenfassen:

**Hilfssatz 1.** *Machen wir im Gleichungssystem (4. 1) zusätzlich die Annahme*

$$\gamma \geq 0, \quad F \geq 0, \quad (4. 2)$$

*so gilt für eine allfällig existierende Lösung von (4. 1) im Innern und auf dem Rand von  $G'$*

$$u \leq 0. \quad (4. 3)$$

*Beweis.* Angenommen, es existiere eine Lösungsfunktion  $u(x, y)$  mit wenigstens einem positiven Wert. Dann bezeichne  $u^* > 0$  den maximalen Wert von  $u$  in  $G'$ . Betrachten wir zuerst die Konsequenzen für den Fall, dass  $u^*$  einem Punkt *im Innern* von  $G'$  zugeordnet wäre. Für diesen Punkt müsste dann nach (4. 2)

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 - \beta u^* \geq 0$$

gelten, wobei sich unter den Nachbarpunkten auch Randpunkte befinden können. Daraus ergäbe sich für einen beliebigen der vier Nachbarpunkte, etwa für  $u_1$  wegen (2. 4), (2. 5), (2. 6)

$$\alpha_1 u_1 \geq (\beta - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) u^* = (\beta - 4 + \alpha_1) u^*$$

oder

$$u_1 \geq \left(1 + \frac{\beta - 4}{\alpha_1}\right) u^* \geq u^*. \quad (4. 4)$$

Sollte im betrachteten Punkt  $\beta > 4$  sein, so könnte (4. 4) nur mit dem Grösserzeichen bestehen. Damit hätten wir aber wegen der Maximumeigenschaft von  $u^*$  bereits einen Widerspruch. Für  $\beta = 4$  würde man  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u^*$



erhalten. Man könnte dann den gleichen Schluss, der zu (4. 4) geführt hat, mit den im Innern von  $G'$  liegenden Nachbarpunkten fortsetzen. Da  $G'$  zusammenhängend ist, so werden davon alle Gitterpunkte erfasst. Einem Widerspruch könnten wir vorerst nur in dem Sonderfall entgehen, wo  $\beta$  überall gleich 4 ist. Hierbei hätte  $u(x, y)$  im Innern und am Rande den konstanten Wert  $u^*$ .

Aus dem Gesagten dürfen wir schliessen, dass der maximale Wert  $u^*$  in wenigstens einem Punkt des Randes angenommen würde. Ein solcher Punkt kann nicht zu  $C_2'$  gehören. Denn dort müsste, wegen  $K = 0, H > 0, F \geq 0$  und (4. 1),  $U \leq 0$  sein. Es würde sich also um einen Punkt von  $C_1'$  handeln. Daher wäre  $K = 1$ , und man könnte (4. 1) die Ungleichung

$$u \geq H u^* \quad (4. 5)$$

entnehmen, wo  $u$  wegen (3. 2) im allgemeinen einen Mittelwert zweier Funktionswerte  $u'$  und  $u''$  bezeichnet. Nun ist wegen (3. 8)  $H \geq 1$ , weshalb (4. 5) in allen Fällen zum Widerspruch führt, wo nicht gerade  $H = 1$  und  $u = u' = u'' = u^*$  ist. In diesem Sonderfall aber gäbe es einen inneren Punkt mit dem maximalen Funktionswert  $u^*$ , so dass nach den aus (4. 4) gezogenen Konsequenzen überall  $\beta = 4$  und  $u(x, y) = u^*$  gelten müsste. Daher wäre  $C_2'$  eine Nullmenge. Nach (3. 9) gäbe es dann wenigstens einen Randpunkt mit  $H > 1$ . Doch wäre auch für einen solchen Punkt der Widerspruch in der Ungleichung (4. 5) offenkundig.

**5. Hilfssatz 2.** *Verschwinden alle Werte von  $\gamma$  in  $G'$  und alle Werte von  $F$  auf  $C'$ , ist also das Gleichungssystem (4. 1) homogen, so besitzt es nur die triviale Lösung  $u(x, y) = 0$ .*

*Beweis.*  $u(x, y) = 0$  ist sicher eine Lösung des homogenen Gleichungssystems. Gäbe es noch eine von ihr verschiedene Lösung  $u^*(x, y)$ , so müsste wegen Hilfssatz 1  $u^*(x, y) \leq 0$  sein. Da aber mit  $u^*(x, y)$  auch  $-u^*(x, y)$  eine Lösung wäre, so müsste  $u^*(x, y) \geq 0$  zugleich mit  $u^*(x, y) \leq 0$  gelten, was  $u^* \equiv 0$  zur Folge hätte.

**Hilfssatz 3.** *Das Gleichungssystem (4. 1) besitzt stets eine eindeutig bestimmte Lösung.*

*Beweis.* Aus dem Hilfssatz 2 folgt, dass die Determinante des Systems (4. 1) von Null verschieden sein muss. Dies ist aber eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung.

**Hilfssatz 4.** *Es seien  $u(x, y)$  und  $w(x, y)$  zwei Gitterfunktionen in  $G'$ , für welche*

$$l(w) \leq l(u), \quad L(W) \leq L(U) \quad (5. 1)$$

*vorausgesetzt ist. Dann gilt im Innern und auf dem Rand von  $G'$*

$$w \geq u. \quad (5. 2)$$

*Beweis.* Man führe die Gitterfunktion  $z = u - w$  ein. Aus (5.1) folgt  $l(z) \geq 0$ ,  $L(z) \geq 0$ , so dass  $z$  die Bedingungen (4.2) des Hilfssatzes 1 erfüllt. Somit ist  $z \leq 0$ ,  $w \geq u$ , q. e. d.

**Hilfssatz 5.** *Es seien  $u(x, y)$  und  $w(x, y)$  zwei Gitterfunktionen in  $G'$ , welche die Bedingungen*

$$l(w) \leq -|l(u)|, \quad L(W) \leq -|L(U)| \quad (5.3)$$

*erfüllen. Dann gilt im Innern und auf dem Rande von  $G'$*

$$w \geq |u|. \quad (5.4)$$

*Beweis.* Dem Hilfssatz 4 entnimmt man, dass bei Verkleinerung von  $l(u)$  und von  $L(U)$  die Gitterfunktion  $u(x, y)$  wächst. Nun folgt aus (5.3)  $l(w) \leq l(u)$ ,  $L(W) \leq L(U)$  und damit  $w \geq u$ . Andererseits ergibt sich aus (5.3) durch Zeichenumkehr  $l(-w) \geq |l(u)|$ ,  $L(-W) \geq |L(U)|$  und daher  $l(-w) \geq l(u)$ ,  $L(-W) \geq L(U)$ , was mit Hilfssatz 4 zu  $-w \leq u$  oder zu  $w \geq -u$  führt. Die Ergebnisse  $w \geq u$  und  $w \geq -u$  sind in der Ungleichung (5.4) zusammengefasst.

6. Für spätere Konvergenzbetrachtungen führen wir im Gittergebiet  $G'$  spezielle Gitterfunktionen  $g_\nu(x, y)$  ein.  $G'$  besitze  $n$  Randpunkte, die wir in irgendeiner Reihenfolge mit  $Q_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) bezeichnen. Dann werde  $g_\nu(x, y)$  folgendermassen definiert:

- Es sei  $\nu$  eine der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ . Dann nehme  $g_\nu(x, y)$  in  $Q_\nu$  den Wert 1, in allen übrigen Randpunkten den Wert Null an.
- $g_\nu(x, y)$  genüge in jedem innern Punkt von  $G'$  der Differenzengleichung  $l(u) = 0$  mit den in (2.4), (2.5) und (2.6) gemachten Annahmen über die Koeffizienten.

Wegen a genügt  $g_\nu(x, y)$  einer (inhomogenen) Randbedingung erster Art. Daher ist  $g_\nu(x, y)$  nach Hilfssatz 3 eine eindeutig bestimmte Gitterfunktion. Die obige Definition erinnert an diejenige einer Greenschen Funktion. Wir wollen deshalb die Werte von  $g_\nu(x, y)$ , ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ), die *Greenschen Zahlen* des Gittergebietes  $G'$  nennen<sup>1)</sup>.

Für alle Punkte im Innern von  $G'$  leiten wir die Ungleichung

$$0 < g_\nu(x, y) < 1 \quad (6.1)$$

her. Zu diesem Zweck greifen wir einen beliebigen innern Punkt  $P_0$  heraus. Dann besagt die Gleichung  $l(u) = 0$ , der  $g_\nu(x, y) = g_\nu(P)$  definitionsgemäss genügt, nach einfacher Umformung:

<sup>1)</sup> Für den Spezialfall der Potentialgleichung wurden «Greensche Zahlen» schon mehrfach eingeführt. H. LIEBMANN [11] und D. MOSKOVITZ [13] geben ihre Werte für einfache quadratische und rechteckige Bereiche an. F. WOLF [24] spricht von «Gewichten» und verwendet sie für seinen Konvergenzbeweis des Liebmannschen Verfahrens.



$$g_v(P_0) = \frac{4}{\beta} \cdot \frac{\alpha_1 g_v(P_1) + \alpha_2 g_v(P_2) + \alpha_3 g_v(P_3) + \alpha_4 g_v(P_4)}{4}. \quad (6.2)$$

Da die vier Koeffizienten  $\alpha$  nach (2. 6) und (2. 4) als positive Zahlen mit der Summe 4 vorausgesetzt sind, so bedeutet der zweite Faktor rechts in (6. 2) ein arithmetisches Mittel mit den Gewichten  $\alpha$ . Diese Grösse liegt daher im Innern des von den Zahlen  $g_v(P_1), \dots, g_v(P_4)$  gebildeten Intervalls. Da ferner  $g_v(x, y)$  nach Definition am Rande nur der Werte 0 und 1 fähig ist, so liegen sämtliche Mittelwerte im Innern des Intervalls  $(0, 1)$ . An dieser Eigenschaft ändert der andere Faktor  $4/\beta$  wegen (2. 5) nichts, womit (6. 1) bewiesen ist.

Wir betrachten jetzt alle Gitterfunktionen  $g_v(x, y)$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ). Ihre Summe

$$G(x, y) = \sum_{v=1}^n g_v(x, y) \quad (6.3)$$

ist eine Gitterfunktion, welche wiederum die homogene Gleichung  $l(u) = 0$  befriedigt. In jedem Randpunkt  $Q_v$  nimmt  $G(x, y)$  den Wert 1 an. Denken wir uns in (6. 2)  $g_v(x, y)$  durch  $G(x, y)$  ersetzt, so folgt analog für jeden innern Punkt von  $G'$

$$0 < G(x, y) \leq 1. \quad (6.4)$$

Im Spezialfall, wo in (1. 1) der Koeffizient  $c$  verschwindet, wo also wegen (2. 2) und (2. 3)  $\beta = 4$  ist, haben wir sogar  $G(x, y) \equiv 1$ .

7. Mit dem Gewonnenen sind wir imstande, zwei Hilfssätze herzuleiten, von denen wir in Abschnitt 18 Gebrauch machen werden.

**Hilfssatz 6.** *Es sei  $u(x, y) = u(P)$  eine in  $G'$  definierte Gitterfunktion, welche in den Randpunkten  $Q_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ), die vorgegebenen Werte  $U_v$  annimmt und welche im Innern der homogenen Differenzengleichung  $l(u) = 0$  genügt. Dann gilt*

$$u(P) = \sum_{v=1}^n g_v(P) U_v. \quad (7.1)$$

*Beweis.* Nach Hilfssatz 3 existiert nur eine Gitterfunktion  $u(P)$ , welche gleichzeitig  $l(u) = 0$  befriedigt und am Rande die Werte  $U_v$  annimmt. Nun erfüllt aber die Summe rechter Hand in (7. 1) diese beiden Bedingungen und muss daher mit  $u(P)$  identisch sein, womit (7. 1) bewiesen ist.

In Abschnitt 3 wurde jedem Randpunkt  $Q$  von  $G'$  ein gewisser Punkt  $S$  zugeordnet, der nicht notwendig ein Gitterpunkt ist, der aber doch auf einer Gitterseite liegt. Wir erweitern nun den Definitionsbereich von  $g_v(P)$ , indem wir analog wie in (3. 2) festsetzen:

$$g_v(S) = \lambda_1 g_v(P') + \lambda_2 g_v(P'') : \quad (7.2)$$

(7. 1) gilt offenbar auch dann noch, wenn man  $P$  durch  $S$  ersetzt.

**Hilfssatz 7.** Gegeben seien  $n$  Zahlen  $\nu_\nu$  mit  $0 \leq \nu_\nu \leq 1$  ( $\nu_\nu \neq 1$ ).  $Q$  bezeichne einen beliebigen Randpunkt von  $G'$  und  $S$  den zugeordneten inneren Punkt. Dann existiert eine von der Wahl von  $Q$  unabhängige Zahl  $\Theta$  mit

$$0 \leq \Theta < 1 \quad (7.3)$$

derart, dass

$$\sum_{\nu=1}^n \nu_\nu g_\nu(S) \leq \Theta \quad (7.4)$$

gilt.

*Beweis.* Wenigstens ein  $\nu_\nu$  ist nach Annahme kleiner als 1. Es sei dies etwa  $\nu_1$ . Aus (6.4) und (6.1) folgt dann für einen beliebigen Gitterpunkt im Innern von  $G'$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \nu_\nu g_\nu(P) &\leq \nu_1 g_1(P) + g_2(P) + \dots + g_n(P) = G(P) + g_1(P) (\nu_1 - 1) \\ &\leq 1 - (1 - \nu_1) g_1(P) < 1. \end{aligned}$$

Im Falle, wo  $P$  ein Randpunkt von  $G'$  ist, können wir dieselbe Abschätzung durchführen. Nur muss in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen zugelassen werden, da ja  $g_1(P) = 0$  sein könnte. Wenden wir die Ungleichung auf  $P'$  und  $P''$  an und beachten, dass nach Abschnitt 3 wenigstens einer von ihnen ein innerer Gitterpunkt ist, so folgt aus (7.2) wegen  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  sofort  $\sum_{\nu=1}^n \nu_\nu g_\nu(S) < 1$ . Da nur endlich viele Randpunkte  $Q$  mit je einem zugeordneten Punkt  $S$  vorhanden sind, so existiert die im Hilfssatz 7 angegebene Schranke  $\Theta < 1$ .

8. In diesem Abschnitt rechtfertigen wir die Voraussetzung, wonach die Randkurve  $C$  von Ecken (und Spitzen) frei sein soll.

Die Schwierigkeiten, welche Ecken bieten, rühren nicht von der Randbedingung (1.2) her. Denn um eine samt ihren partiellen Ableitungen stetige Lösung  $v(x, y)$  zu ermöglichen, genügt es, den Koeffizienten  $k(s)$  und  $h(s)$  in allfälligen Eckpunkten passende Unstetigkeiten beizulegen.

Auch wird der Rechner vor solchen Singularitäten der Randkurve kaum zurückschrecken. Es wird ihm ohne Mühe gelingen, geeignete Gitterrandpunkte und brauchbaren Ersatz für dahinfliehende Randbedingungen in der Nähe von Ecken zu finden.

Vielmehr sehen wir uns deshalb gezwungen, Ecken in der Randkurve auszuschliessen, weil unsere Untersuchung der Approximation einer Gitterlösung an die exakte Lösung vor noch nicht überwundene Schwierigkeiten gestellt würde. An zwei Beispielen der Figur 2 weisen wir auf die Besonderheiten hin, die bei Ecken vorliegen können:

In Figur 2a können wir vom Gitterrandpunkt  $Q$  kein Lot auf die Randkurve fallen und daher eine Randbedingung zweiter oder dritter Art nicht approxi-



mieren. In Figur 2b ist eine Ecke mit kleinem Winkel  $\alpha$  gezeichnet. Hier «häufen» sich die Gitterrandpunkte derart stark, dass nicht einzusehen ist, wie die erforderlichen Differenzengleichungen aufgestellt werden könnten.

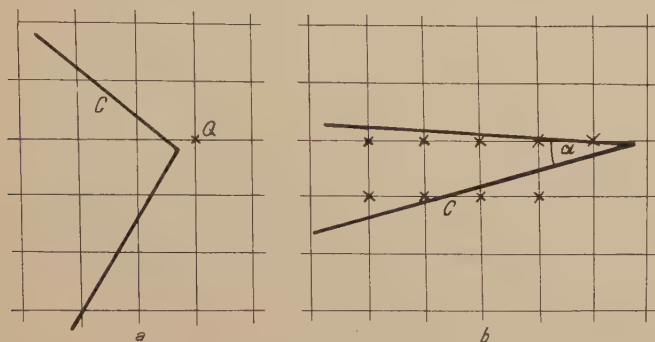


Fig. 2

Die Schwierigkeiten der Approximation, wenn die Randkurve  $C$  Ecken besitzt.

Während wir uns bei stetiger Tangente die eindeutige Zuordnung der Gitterrandpunkte zu den Punkten von  $C$  dadurch sichern konnten, dass wir die Gitterseite  $h$  hinreichend klein voraussetzten, versagt dieser Weg bei Ecken vollkommen. *Denn wie fein wir auch ein Gitter wählen, so werden bei Ecken keinerlei Erleichterungen eintreten.*

Nur im Falle eines *Stufenrandes*, wo die Randkurve  $C$  stückweise parallel zu den Gitterseiten verläuft, bilden Eckpunkte für unsere Betrachtungen kein Hindernis.

## § 2. Der beim Übergang zu den Differenzengleichungen begangene Fehler

9. Bei der im folgenden durchzuführenden Fehlerabschätzung wird es sich darum handeln, den Unterschied der Lösung  $v(x, y)$  der Differentialgleichung (1. 1) mit der Randbedingung (1. 2) gegenüber der Lösung  $u(x, y)$  des zugeordneten Systems der Differenzengleichungen (4. 1) zu bestimmen. Für diese Differenz setzen wir

$$\delta(x, y) = v(x, y) - u(x, y). \quad (9. 1)$$

$\delta(x, y)$  kann natürlich nur in den Gitterpunkten von  $G'$  gebildet werden. Es ist zu erwarten, dass sich  $\delta(x, y)$  beim Übergang zu einem feineren Gitter verkleinert. *Es wird unser wichtigstes Anliegen sein, zu prüfen, wie  $|\delta(x, y)|$  von der nach Null strebenden Gitterseite  $h$  abhängt.*

Vorerst bestimmen wir die *Restglieder*, welche beim Übergang von der Differentialgleichung zu den Differenzengleichungen auftreten. Zu diesem Zweck

sei  $w(x, y)$  eine beliebige Funktion, die in  $G$  samt ihren partiellen Ableitungen bis zur vierten Ordnung stetig ist. Wie in Figur 1 greifen wir einen innern Punkt  $P_0$  und seine vier Nachbarpunkte im Gitter heraus und bezeichnen die Werte von  $w(x, y)$  und der Ableitungen in  $P_0$  kurz mit  $w, \partial w / \partial x, \dots$ , die Werte von  $w(x, y)$  in den Nachbarpunkten aber mit  $w_1, \dots, w_4$ . Dann haben wir

$$\left. \begin{aligned} w_1 \\ w_3 \end{aligned} \right\} &= w \pm h \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \left\{ \begin{matrix} \Psi_1 \\ \Psi_3 \end{matrix} \right\} \\ w_2 \\ w_4 \end{aligned} \right\} &= w \pm h \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \pm \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{h^4}{4!} \left\{ \begin{matrix} \Psi_2 \\ \Psi_4 \end{matrix} \right\} \quad (9.2)$$

wo  $\Psi_1, \Psi_3$  und  $\Psi_2, \Psi_4$  gewisse mit  $P_0$  variable Zwischenwerte der vierten partiellen Ableitung von  $w(x, y)$  nach  $x$  bzw. nach  $y$  bezeichnen. Bricht man in (9.2) schon bei Gliedern dritter Ordnung ab, so wollen wir die entsprechenden Zwischenwerte der partiellen Ableitungen dritter Ordnung mit  $\Phi_1, \Phi_3$  bzw. mit  $\Phi_2, \Phi_4$  bezeichnen.

Durch passende Kombination der Relationen (9.2) folgt

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 4w) - \frac{h^2}{24} (\Psi_1 + \dots + \Psi_4)$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_1 - w_3}{2h} - \frac{h^2}{12} (\Phi_1 + \Phi_3), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_2 - w_4}{2h} - \frac{h^2}{12} (\Phi_2 + \Phi_4).$$

Führen wir noch zur Abkürzung für den Differentialausdruck in (1.1) die Bezeichnung

$$\bar{l}(w) \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y} + c_5 w \quad (9.3)$$

ein, so folgt

$$l(w) = \frac{1}{h^2} \bar{l}(w) - \frac{h^2}{12} \left[ \frac{1}{2} (\Psi_1 + \dots + \Psi_4) + a (\Phi_1 + \Phi_3) + b (\Phi_2 + \Phi_4) \right], \quad (9.4)$$

wo  $l(w)$  den in (4.1) definierten linearen Ausdruck bezeichnet. Das Restglied ohne den Faktor  $h^2$  bezeichnen wir mit

$$R_w = - \frac{1}{12} \left[ \frac{1}{2} (\Psi_1 + \dots + \Psi_4) + a (\Phi_1 + \Phi_3) + b (\Phi_2 + \Phi_4) \right]. \quad (9.5)$$

$R_w$  ist ein lineares Funktional von  $w(x, y)$ . Nunmehr kann (9.4) in der Gestalt

$$h^2 l(w) = l(w) + h^4 R_w \quad (9.6)$$

geschrieben werden<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Mit anderen Bezeichnungen hat S. GERSCHGORIN [10], S. 375, die Relation (9.6) zusammen mit dem Restglied angegeben.



Wenden wir (9. 6) auf die Lösung  $v(x, y)$  von (1. 1) an, was wegen der in Abschnitt 1 gemachten Annahmen zulässig ist, so folgt

$$h^2 g = l(v) + h^4 R_v$$

oder nach Subtraktion der für  $u(x, y)$  gültigen Relation (4. 1) bzw. (2. 2) wegen (9. 1)

$$l(\delta) = l(v - u) = -h^4 R_v. \quad (9. 7)$$

Diese Relation gilt für jeden innern Gitterpunkt von  $G'$ . Der Faktor  $R_v$  ist von der Gitterseite  $h$  indirekt abhängig. Da aber alle in  $R_v$  eingehenden Koeffizienten und Ableitungen beschränkt sind, so existiert eine von  $h$  unabhängige, positive Schranke  $R_v^*$ , so dass

$$|l(\delta)| \leq h^4 R_v^* \quad (9. 8)$$

gesetzt werden darf.

10. Etwas mehr Mühe bereitet die Diskussion der Fehler, die durch Approximation des Randes  $C$  durch den Streckenzug  $C'$  zustande kommen. In Figur 3, welche einen kleinen Ausschnitt von Figur 1 wiedergibt, betrachten wir einen beliebigen Gitterrandpunkt  $Q$  auf  $C'$ . Die durch  $Q$  laufende Normale von  $C$  ordnet  $Q$  einen Punkt  $\bar{Q}$  auf  $C$  zu sowie auch einen Punkt  $S$  auf der nächsten von der Normalen geschnittenen Gitterseite im Innern von  $G'$ . Wie in Abschnitt 3 seien die Endpunkte dieser Gitterseite mit  $P'$  und  $P''$  bezeichnet. Setzen wir  $Q\bar{Q} = \varrho h$ , so gilt wegen der in Abschnitt 2 dargelegten Konstruktion von  $C'$

$$-\frac{1}{2} \leq \varrho \leq \frac{1}{2}, \quad (10. 1)$$

wobei  $\varrho$  positiv zu nehmen ist, wenn  $Q$  innerhalb von  $C$  liegt, und negativ im umgekehrten Fall. Über  $QS = \sigma h$  liegt bereits die Ungleichung (3. 1) vor. Ferner wird mit (3. 2) das Teilverhältnis des Punktes  $S$  auf  $P'P''$  festgelegt, so dass  $P'S = \lambda_2 h$  und  $P''S = \lambda_1 h$  zu setzen ist.

Es sei  $w(x, y)$  wie in Abschnitt 9 eine stetige Funktion in  $G$ , deren Ableitungen passenden Beschränkungen unterworfen sind. Die Werte, welche  $w(x, y)$  in den Punkten  $Q$ ,  $\bar{Q}$  und  $S$  annimmt, seien der Reihe nach mit  $\bar{W}$ ,  $W$  und  $\bar{w}$  bezeichnet. Um mit  $w(x, y)$  längs dem Gitterrand  $C'$  die in (4. 1) vorkommende Linearform

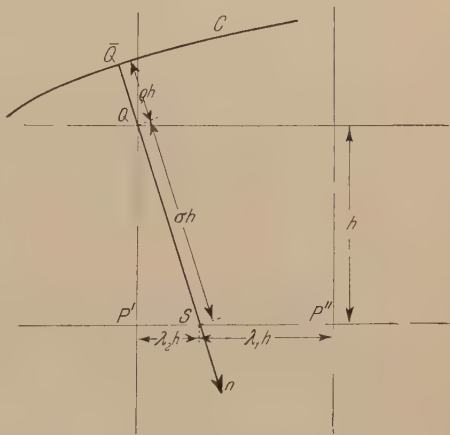


Fig. 3  
Approximation der Normalableitung.

$$L(W) = K w - H W \quad (10.2)$$

bilden zu können, haben wir zunächst zu beachten, dass  $w$  nicht mit  $\bar{w}$  übereinstimmt, trotzdem sich beide Werte auf den Punkt  $S$  beziehen. Denn  $w$  muss nach Vereinbarung von Abschnitt 3 durch lineare Interpolation aus  $w(P')$  und  $w(P'')$  bestimmt werden. Die Differenz  $\bar{w} - w$  ist folglich der Interpolationsfehler, der im Falle, dass  $P'P''$  parallel zur  $x$ -Achse verläuft, lautet

$$\bar{w} - w = \frac{(x_S - x_{P'}) (x_S - x_{P''})}{2!} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\xi}.$$

Berücksichtigen wir auch eine Interpolation in der  $y$ -Richtung, so folgt allgemein

$$\bar{w} - w = h^2 J_w, \quad (10.3)$$

wo  $J_w$  eine variable Grösse ist, für die

$$|J_w| \leq \frac{1}{8} \text{Max}_G \left( \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right| \right) \quad (10.4)$$

gilt. Diese obere, von  $h$  unabhängige Schranke sei mit  $J_w^*$  bezeichnet.

11. Um die in (1. 2) vorkommende Linearform

$$L(W) \equiv k(s) \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} - h(s) \bar{W}, \quad (11.1)$$

die jetzt für den Randwert  $\bar{W}$  im Punkte  $\bar{Q}$  geschrieben ist, mit  $L(W)$  in Beziehung bringen zu können, drücken wir  $W$  und  $\bar{w}$  mit einer Taylor-Entwicklung durch die Werte und Ableitungen am Rande aus:

$$W = W + \varrho h \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} + \frac{(\varrho h)^2}{2!} \chi_1 = \bar{W} + \varrho h \chi_3, \quad (11.2)$$

$$\bar{w} = W + \tau h \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} + \frac{(\tau h)^2}{2!} \chi_2, \quad (11.3)$$

wo

$$\tau = \varrho + \sigma$$

gesetzt ist und wo  $\chi_1, \chi_2$  gewisse Mittelwerte der Normalableitung zweiter Ordnung und  $\chi_3$  einen Mittelwert erster Ordnung bezeichnen.

Für Punkte auf  $C'_1$  gewinnen wir wegen  $k(s) = 1$  zunächst aus (10. 2), (10. 3), (11. 2) und (11. 3)

$$L(W) = (1 - H) W + (\tau h - H \varrho h) \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} + h^2 \left[ \frac{\tau^2}{2} \chi_2 - H \frac{\varrho^2}{2} \chi_1 - J_w \right].$$

Hierin ersetzen wir  $H$  durch den in (3. 8) stehenden Ausdruck und  $\partial \bar{W} / \partial n$  gemäss (11. 1) durch  $L(W) + h(s) W$ . Ferner führen wir zur Abkürzung an



Stelle der eckigen Klammer die Grösse  $T_w$  ein. Dann folgt wegen  $\tau = \varrho + \sigma$

$$L(W) = \sigma h L(W) - h^2 [\varrho \sigma h(s) \bar{L}(W) + \varrho \sigma h^2(s) \bar{W} - T_w] \text{ auf } C'_1. \quad (11.4)$$

Auf  $C'_2$  aber schliessen wir aus (10. 2) und (11. 2) wegen  $K = 0$  und  $H = \sigma h$

$$L(W) = -\sigma h W = -\sigma h \bar{W} - \varrho \sigma h^2 \chi_3$$

und, wenn wir noch (11. 1) mit  $k(s) = 0$ ,  $h(s) = 1$  beiziehen,

$$L(W) = \sigma h \bar{L}(\bar{W}) - \varrho \sigma h^2 \chi_3 \text{ auf } C'_2. \quad (11.5)$$

Damit ist in beiden Fällen  $L(W)$  durch  $\bar{L}(\bar{W})$  ausgedrückt.

12. Wenden wir (11. 4) und (11. 5) auf die spezielle Funktion  $v(x, y)$  an, welche die Lösung der Gleichung (1. 1) mit den Randbedingungen (1. 2) bezeichnet, so erhalten wir

$$L(V) = \sigma h f(s) - h^2 [\varrho \sigma h(s) f(s) + \varrho \sigma h^2(s) V - T_v] \text{ auf } C'_1,$$

$$L(V) = \sigma h f(s) - h^2 \varrho \sigma \chi_3 \text{ auf } C'_2.$$

Subtrahieren wir davon die in (3. 5) für  $u(x, y)$  hergeleitete Randbedingung  $L(U) = F = \sigma h f(s)$ , so erhalten wir wegen (9. 1)

$$L(\delta) = -h^2 [\varrho \sigma h(s) f(s) + \varrho \sigma h^2(s) V - T_v] \text{ auf } C'_1, \quad (12.1)$$

$$L(\delta) = -h^2 \varrho \sigma \chi_3 \text{ auf } C'_2. \quad (12.2)$$

Für die absoluten Beträge der mit  $h^2$  multiplizierten Ausdrücke existiert, ähnlich wie in (9. 8), eine von  $h$  unabhängige, gemeinsame obere Schranke  $S_v^*$ , so dass wir

$$|L(\delta)| \leq h^2 S_v^* \text{ auf } C' \quad (12.3)$$

schreiben dürfen.

13. Nach diesen Vorbereitungen gelingt es uns nun, das von S. GERSCHGORIN [10] für den Spezialfall der Randbedingungen erster Art geschaffene *Majorantenverfahren* auf Probleme mit anderen Randbedingungen zu verallgemeinern.

Über die Fehlerfunktion  $\delta(x, y)$ , die in (9. 1) definiert wurde, haben wir bis jetzt die Ungleichungen (9. 8) und (12. 3) hergeleitet. Um von hier aus zu einer Abschätzung von  $|\delta(x, y)|$  zu gelangen, führen wir die Hilfsfunktion  $z(x, y)$  als Lösung des folgenden Randwertproblems ein:

$$\left. \begin{aligned} \bar{l}(z) &\equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z = -1 \text{ in } G, \\ \bar{L}(z) &\equiv k(s) \frac{\partial z}{\partial n} - h(s) z = -1 \text{ auf } C. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Nach den in Abschnitt 1 getroffenen Voraussetzungen existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $z(x, y)$ , die samt ihren partiellen Ableitungen bis zur vierten Ordnung in  $G$  stetig ist<sup>1)</sup>.

Wir versuchen nun,  $|\delta(x, y)|$  durch eine von  $z(x, y)$  abgeleitete Hilfsfunktion

$$w(x, y) = m z(x, y) \quad (13. 2)$$

nach oben abzuschätzen. Hierin bezeichnet  $m$  einen passend zu bestimmenden, von  $x, y$  unabhängigen, positiven Parameter. Wir stützen uns dabei auf den Hilfssatz 5, wonach

$$|\delta(x, y)| \leq w(x, y) \quad (13. 3)$$

bereits aus den Ungleichungen

$$l(w) \leq -|l(\delta)| \quad \text{im Innern von } G', \quad (13. 4)$$

$$L(W) \leq -|L(\delta)| \quad \text{auf } C' \quad (13. 5)$$

folgt. Es wird also unsere Aufgabe sein, durch passende Wahl von  $m$  die Ungleichungen (13. 4) und (13. 5) zu erzwingen.

Um (13. 4) zu erfüllen, greifen wir auf die Formel (9. 6) zurück, welche auf die in (13. 2) definierte Funktion  $w(x, y)$  wegen der  $z(x, y)$  und ihren partiellen Ableitungen zukommenden Stetigkeitseigenschaften anwendbar ist. Wir erhalten

$$l(w) = h^2 \bar{l}(w) - h^4 R_w = m h^2 \bar{l}(z) - m h^4 R_z$$

oder wegen (13. 1)

$$l(w) = -m h^2 (1 + h^2 R_z).$$

Nun sei  $R_z^*$  eine obere Schranke für  $|R_z|$  im Gebiet  $G$  und  $h$  bereits so klein angenommen, dass

$$h^2 R_z^* \leq \frac{1}{2}$$

ist. Dann folgt

$$l(w) \leq -\frac{1}{2} m h^2. \quad (13. 6)$$

Um also (13. 4) zu erhalten, genügt es, wegen (9. 8)

$$-\frac{1}{2} m h^2 \leq -h^4 R_v^*$$

oder

$$m \geq 2 h^2 R_v^* \quad (13. 7)$$

zu setzen.

<sup>1)</sup> In der Definition von  $z$  weichen wir von S. GERSCHGORIN ab, indem wir die Randbedingung *inhomogen* ansetzen. Dadurch ersparen wir uns eine mühsame und unübersichtliche Abschätzung des in (13. 2) eingeführten Faktors  $m$ .



14. Zur Herleitung von (13. 5) benützen wir (11. 4), (11. 5), (13. 1) und erhalten

$$L(W) = -m h \sigma \left\{ 1 - h \left[ \varrho h(s) - \varrho h^2(s) \bar{Z} + \frac{1}{\sigma} T_z \right] \right\} \quad \text{auf } C'_1,$$

$$L(W) = -m h \sigma \{ 1 + h \varrho \chi_3(z) \} \quad \text{auf } C'_2.$$

$h$  sei bereits so klein gewählt, dass die absoluten Beträge der beiden geschweiften Klammern überall auf  $C'_1$  bzw.  $C'_2$  mindestens den Wert  $1/2$  besitzen. Dann folgt wegen  $\sigma \geq 1$  in beiden Fällen gemeinsam

$$L(W) \leq -\frac{1}{2} m h.$$

Damit (13. 5) erfüllt ist, haben wir wegen (12. 3) bloss

$$-\frac{1}{2} m h \leq -h^2 S_v^*$$

oder

$$m \geq 2 h S_v^* \quad (14. 1)$$

zu setzen.

Mit (13. 7) zusammen müssen wir somit

$$m \geq h \text{Max} (2 h R_v^*, 2 S_v^*) \quad (14. 2)$$

fordern. Für hinreichend kleines  $h$  existiert somit eine von  $h$  unabhängige, positive Konstante  $M$ , so dass zur Erfüllung von (13. 4), (13. 5) und damit von (13. 3)

$$m = h M \quad (14. 3)$$

gesetzt werden darf.

Führen wir noch zur Abkürzung die von der Feinheit des Gitters unabhängige Funktion  $t(x, y) = M z(x, y)$  ein, so können wir das in (13. 3) erhaltene Ergebnis in dem folgenden Satz formulieren:

**Satz 1.** *Löst man an Stelle der gegebenen Differentialgleichung (1. 1) mit den Randbedingungen (1. 2) das System der Differenzengleichungen (4. 1) für ein quadratisches Gitter mit der Seite  $h$  auf, so gilt für den Unterschied  $\delta(x, y)$  der beiden Lösungen in den Gitterpunkten die Ungleichung*

$$|\delta(x, y)| \leq h t(x, y), \quad (14. 4)$$

wo  $t(x, y)$  eine nur vom gestellten Problem abhängige, in  $G$  stetige Funktion bedeutet.

*Geht man demnach zu immer feineren Gittern über, so strebt der Fehler  $\delta(x, y)$  mindestens linear mit  $h$  gegen Null, und die Gitterlösung konvergiert gleichmässig gegen die exakte Lösung des gestellten Problems.*

15. Bei einem praktischen Beispiel wird man selten in der Lage sein,  $t(x, y)$  zuverlässig genug zu bestimmen. Überdies dürfte sich der Aufwand kaum lohnen.

Es ist jedoch nicht unwichtig, zu wissen, von welchen Parametern und Funktionen  $t(x, y)$  abhängt, um in Fällen schlechter Konvergenz die besten Massnahmen zur Beschleunigung der numerischen Rechnungen treffen zu können.

Sollte zum Beispiel eine *quadratische Konvergenz* erwünscht sein, das heisst in (14. 4) der Faktor  $h^2$  an Stelle von  $h$  stehen, so ersieht man aus (14. 2), dass  $S_v^*$  linear mit  $h$  gegen Null streben müsste. Nun ist  $S_v^*$  eine gemeinsame obere Schranke für die Beträge der mit  $h^2$  multiplizierten Ausdrücke in (12. 1) und (12. 2). Die erste dieser Relationen steht für eine Randbedingung dritter, die zweite für eine solche erster Art. In beiden Fällen müsste man also die Approximation an die exakte Randbedingung (1. 2) verbessern. Dies ist auf Kosten einer vermehrten Rechenarbeit ohne weiteres möglich. Für eine Randbedingung erster Art empfiehlt sich die von L. COLLATZ [1] vorgeschlagene Interpolationsmethode. Um das Ziel auch im Fall einer Randbedingung zweiter oder dritter Art zu erreichen, müsste man den in (3. 3) eingeführten Differenzenquotienten durch einen finiten Ausdruck zweiter Ordnung ersetzen. Geometrisch bedeutet dies: Man müsste die Ableitung am Rande durch eine Dreipunkteformel der numerischen Differentiation approximieren<sup>1)</sup>.

Unser Ergebnis zeigt auch, dass die gelegentlich geäusserte Meinung, man müsse vor allem den Approximationsgrad der Differenzengleichungen (2. 3) im Innern des Gebietes erhöhen, jedenfalls dann nicht zu Recht besteht, wenn es darum geht, den Abbrechfehler (truncation error) zu vermindern.

### § 3. Das numerische Verfahren zur angenäherten Auflösung des zugeordneten Systems von Differenzengleichungen

16. Das System von Differenzengleichungen (4. 1) enthält ebenso viele Gleichungen, wie das gewählte Gittergebiet  $G'$ , einschliesslich des Randes  $C'$ , Punkte besitzt. Diese Zahl ist in praktischen Beispielen ziemlich gross, und es ist daher keine Rede davon, das System algebraisch auflösen zu können. Es wird nichts anderes übrigbleiben, als nach einem geeigneten Approximationsverfahren zu suchen.

In dem Spezialfall, wo überall auf  $C'$  eine Randbedingung erster Art vorliegt, fallen die auf den Rand bezüglichen Differenzengleichungen in (4. 1) fort, da ja die Randwerte fest sind. Für diese spezielle Aufgabe empfiehlt sich das vor einigen Jahren von R. V. SOUTHWELL [21] ersonnene *Relaxationsverfahren*, dessen Überlegenheit über frühere Methoden mehrfach bestätigt wurde, vgl. [6], [7], [8], [22], [23]<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Die von L. FOX [8] vorgeschlagene Dreipunkteformel eignet sich anscheinend nur für einen rechteckigen oder einen Stufenrand.

<sup>2)</sup> Wir sehen hier und im folgenden von der Verwendung von *Rechenautomaten* ab. Selbstverständlich ergeben sich für das Maschinenrechnen etwas andere Gesichtspunkte. Wir verweisen hierzu auf die kürzlich von S. P. FRANKEL [9] und von E. STIEFEL [22] erschienenen Arbeiten.

Zur numerischen Auflösung von (4. 1) für den allgemeineren Fall, wo auch am Rande Differenzengleichungen auftreten, liegt es nun nahe, das Relaxationsverfahren von SOUTHWELL in geeigneter Weise zu ergänzen. Dies ist der Grundgedanke unseres Vorgehens in Abschnitt 17.

Das Relaxationsverfahren geht wie jedes Iterationsverfahren von Rohwerten  $w = w(x, y)$  aus, welche hier ganz beliebig sein dürfen. Die Differenzengleichungen (4. 1) sind für die Rohwerte natürlich nicht erfüllt. Wir setzen aber

$$l(w) - \gamma = r, \quad (16. 1)$$

$$L(W) - F = R. \quad (16. 2)$$

$r = r(x, y)$  ist eine Gitterfunktion, die für alle Punkte im Innern von  $G'$  definiert ist.  $R = R(x, y)$  ist nur für Randpunkte erklärt. Die Zahlen  $r$  und  $R$  heissen die *Residuen von  $w$*  in den Gitterpunkten. Die Residuen der Funktion  $u = u(x, y)$ , welche das Gleichungssystem (4. 1) löst, sind offenbar Null. Umgekehrt kann man sich aus dem Wert der Residuen einer Versuchsfunktion  $w = w(x, y)$  ein ungefähres Bild von dem «Fehler»  $w - u$  machen.

Beim Randwertproblem *erster Art* können die Residuen  $R$  am Rande von vorneherein als Null vorausgesetzt werden. Es handelt sich dann darum, die Absolutwerte der Residuen  $r$  in allen inneren Punkten schrittweise kleiner und kleiner zu machen. Hiefür wurde eine Reihe konvergenzbeschleunigender Kunstgriffe geschaffen, die in der Literatur ausführlich beschrieben sind (vgl. [9], [21], [22], [23]). Die Reduktion der Residuen wird kurzweg *Relaxation* genannt. Dass dabei  $w(x, y)$  gegen  $u(x, y)$  konvergiert, ist unter verschiedenen Voraussetzungen, bald über die Differentialgleichung, bald über die Reihenfolge des Vorgehens, mehrfach bewiesen worden (siehe [3], [4], [11], [12], [15], [18], [22], [23], [24]).

17. Treten nun Randbedingungen *zweiter oder dritter Art* hinzu, so hat man ausser den Residuen  $r$  auch die Residuen  $R$  in Randpunkten zu reduzieren. Nach (4. 1) hängen  $r$  und  $R$  sowohl von den Funktionswerten  $w(x, y)$  in inneren Punkten als auch von denen in Randpunkten zugleich ab. Man kann somit die Residuen am Rande nicht unabhängig von den Residuen im Innern gegen Null streben lassen.

Es liegt nahe, in der Weise vorzugehen, dass man beim Abändern von  $w(x, y)$  in randnahen Punkten gleichzeitig die Randwerte so mitverändert, dass  $R = 0$  erreicht wird. Der Rechner dürfte so am raschesten zum Ziele gelangen. Um aber die Konvergenz des Verfahrens leichter beweisen zu können, empfiehlt sich für uns eher ein getrenntes Vorgehen, das sich auf den folgenden beiden Schritten aufbaut:

1. *Schritt.* Ausgehend von irgendeiner Gitterfunktion  $w(x, y)$  in  $G'$  bringe man die Residuen (16. 1) in allen inneren Punkten nach dem üblichen Relaxa-



tionsverfahren zum Verschwinden, lasse aber die Randwerte  $W(x, y)$  unverändert<sup>1)</sup>.

2. *Schritt.* Durch Anpassung der Randwerte  $W(x, y)$  mache man die Residuen (16. 2) in allen Randpunkten zu Null.

Beim ersten Schritt werden die Residuen im Innern zwar Null. Am Rande treten aber von Null verschiedene Residuen auf. Das Umgekehrte erfolgt beim zweiten Schritt. Daher hat man die beiden Schritte abwechselungsweise fortzusetzen. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass dieses alternierende Verfahren konvergent ist.

18. **Satz 2.** *Bringt man, ausgehend von einer beliebigen Gitterfunktion  $w(x, y)$ , abwechselungsweise die Residuen (16. 1) mit Hilfe des Relaxationsverfahrens und die Residuen (16. 2) durch geeignete Abänderung der Randwerte zum Verschwinden, so konvergiert die Gitterfunktion gegen die gesuchte Lösung  $u(x, y)$  des Gleichungssystems (4. 1).*

*Beweis.* Beim ersten Schritt gehen beliebig angenommene Rohwerte  $w(x, y)$  mit den Randwerten  $W$  in eine neue Gitterfunktion  $w_1(x, y)$  über, deren Randwerte  $W_1$  mit  $W$  übereinstimmen. Nur ist jetzt  $r = 0$  in (16. 1), das heisst es gilt

$$l(w_1) = \gamma.$$

Für die Residuen am Rande haben wir zu setzen

$$R = L(W_1) - F = K w_1 - H W - F. \quad (18. 1)$$

Beim zweiten Schritt bringen wir die Residuen am Rande zum Verschwinden, indem wir zu den Randwerten  $W$  passende Grössen  $\Delta W$  addieren. Die so gewonnene neue Gitterfunktion sei mit  $w_2(x, y)$  bezeichnet. Sie stimmt in allen inneren Punkten mit  $w_1(x, y)$  überein, so dass wir

$$0 = L(W_2) - F = K w_2 - H W_2 - F = K w_1 - H (W + \Delta W) - F \quad (18. 2)$$

haben. Ein Vergleich mit (18. 1) führt zu

$$R = H \Delta W. \quad (18. 3)$$

Für Punkte auf  $C_2^*$  sind hierin  $\Delta W$  und  $R$  gleich Null zu setzen.

Beim letzten Vorgang sind im Innern neue Residuen entstanden, welche bei nochmaliger Anwendung des ersten Schrittes zwar verschwinden, jedoch gewisse Änderungen  $\Delta w = \Delta w(x, y)$  an  $w_2(x, y)$  in den inneren Gitterpunkten zur Folge haben. Wir setzen daher

$$w_3(x, y) = w_2(x, y) + \Delta w = w_1(x, y) + \Delta w, \quad W_3 = W_2 = W + \Delta W.$$

<sup>1)</sup> Praktisch muss man wegen der beschränkten Anzahl von Dezimalen die Reduktion der Residuen abbrechen, sobald sie, in der Einheit der letzten mitgeführten Dezimalen ausgedrückt, kleiner als 2 sind und keine Blöcke von vorwiegend positiven oder negativen Residuen vorhanden sind. Man vergleiche hiezu die Betrachtungen von E. STIEFEL [22].

Die Änderungen  $\Delta w$  lassen sich mit Hilfe der in Abschnitt 6 eingeführten *Greenschen Zahlen* folgendermassen berechnen:

Da  $w_1$  mit den Randwerten  $W$  die Gleichungen  $l(w) = \gamma$  erfüllt und dasselbe auch von  $w_3$  mit den Randwerten  $W + \Delta W$  gilt, so muss die Differenz der beiden Gitterfunktionen eine neue Funktion sein, welche der homogenen Gleichung  $l(w_3 - w_1) = 0$  genügt. Ihre Werte im Innern sind gleich  $\Delta w$ , ihre Werte am Rande gleich  $\Delta W$ . Bezeichnet man die Gitterpunkte von  $G'$  mit  $Q_1, \dots, Q_n$  und ordnet ihnen die Randwerte  $\Delta W_1, \dots, \Delta W_n$  zu, so folgt aus Hilfssatz 6 für jeden innern Gitterpunkt  $P$

$$\Delta w(P) = \sum_{\nu=1}^n \Delta W_{\nu} g_{\nu}(P). \quad (18.4)$$

Schreibt man noch (18.3) mit dem Index  $\nu$ , so geht (18.4) wegen  $H_{\nu} > 0$  in

$$\Delta w(P) = \sum_{\nu=1}^n \frac{R_{\nu}}{H_{\nu}} g_{\nu}(P) \quad (18.5)$$

über, wo für Punkte, die auf  $C_2$  liegen,  $R_{\nu} = 0$  zu setzen ist.

Weiter berechnen wir nach Formel (18.1) die neuen Residuen  $R'$ , die beim Übergang von  $w_2$  zu  $w_2 + \Delta w = w_3$  am Rande entstehen müssen. Beachten wir, dass  $w_2$  für alle inneren Punkte gleich  $w_1$  und am Rande gleich  $W + \Delta W$  ist, so folgt

$$R' = L(W_3) - F = K(w_1 + \Delta w) - H(W + \Delta W) - F$$

oder wegen (18.1) und (18.3)

$$R' = K \Delta w. \quad (18.6)$$

Für Randpunkte auf  $C'_2$  verschwinden  $K$  und  $R'$ . Für Randpunkte auf  $C'_1$  ist  $K = 1$  und  $\Delta w$  ein Betrag, der nach den Ausführungen von Abschnitt 3 folgendermassen zu berechnen ist: Jedem Randpunkt  $Q_{\mu}$  von  $C'_1$  ist ein Punkt  $S_{\mu}$  zugeordnet, der nicht notwendig ein Gitterpunkt zu sein braucht. Entsprechend ist der Faktor  $\Delta w = \Delta w(S_{\mu})$  in (18.6) nach (3.2) durch lineare Interpolation aus den Werten von  $\Delta w$  in  $P'$  und  $P''$  zu bestimmen. Benützen wir (18.5) mit  $P = S_{\mu}$  (was nach der dem Hilfssatz 6 folgenden Bemerkung zulässig ist), so besagt (18.6) für einen Punkt  $Q_{\mu}$  von  $C'_1$

$$R'_{\mu} = \Delta w(S_{\mu}) = \sum_{\nu=1}^n \frac{R_{\nu}}{H_{\nu}} g_{\nu}(S_{\mu}). \quad (18.7)$$

Mit  $R_k$  und  $R'_l$  bezeichnen wir dasjenige unter den Residuen  $R_{\nu}$  bzw.  $R'_{\mu}$  mit maximalem absolutem Betrag. Dann folgt aus (18.7), wegen (3.8) und (6.1),

$$|R'_l| \leq \sum_{\nu=1}^n \frac{|R_{\nu}|}{H_{\nu}} g_{\nu}(S_l) \leq |R_k| \sum_{\nu=1}^n \frac{\delta_{\nu}}{H_{\nu}} g_{\nu}(S_l), \quad (18.8)$$

wo  $\delta_v$  gleich 1 oder 0 zu setzen ist, je nachdem ob  $Q_v$  zu  $C'_1$  oder zu  $C'_2$  gehört. Setzen wir noch

$$\frac{\delta_v}{H_v} = \eta_v, \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

so gilt wegen (3. 8) und (3. 9)  $0 \leq \eta_v \leq 1$  ( $\eta_v \neq 1$ ). Daher lässt sich Hilfssatz 7 auf die Summe rechter Hand in (18. 8) anwenden, so dass wir

$$|R'_l| \leq \Theta |R_k|, \quad (\Theta < 1) \quad (18. 9)$$

erhalten. Dies bedeutet: Das Maximum des absoluten Betrages der Residuen am Rande ist kleiner geworden. Nach  $N$ -maliger Anwendung der beiden Schritte hat es sich mindestens um den Faktor  $\Theta^N$  verkleinert. Daher streben die Residuen am Rande gegen Null.

Dass gleichzeitig auch die Residuen im Innern gegen Null streben, schliessen wir aus (18. 3). Danach müssen die Änderungen  $\Delta W$  proportional mit den Residuen am Rande gegen Null konvergieren. Diese  $\Delta W$  sind es aber, welche gemäss (16. 1) in randnahen inneren Punkten gewisse Residuen erzeugen, die wegen der Beschränkungen, denen die Koeffizienten  $\alpha_i$  in (16. 1) unterliegen, ebenfalls eine Nullfolge bilden müssen.

Schliesslich folgt aus der Eindeutigkeit und der Stetigkeit der Lösung von (4. 1), dass die Näherungsfunktion  $w(x, y)$  gegen die exakte Lösung  $u(x, y)$  konvergiert, womit der Satz 2 bewiesen ist.

19. Die im Beweis von Satz 2 gefundenen Relationen gestatten eine Diskussion darüber, mit welcher Geschwindigkeit das Approximationsverfahren zur numerischen Auflösung des Gleichungssystems (4. 1) konvergiert. Offenbar ist die Geschwindigkeit um so grösser, je kleiner der in (18. 9) stehende Faktor  $\Theta$  ist. Die Betrachtung von (18. 8) führt zu den folgenden Fällen, in denen  $\Theta$  verhältnismässig klein ausfällt und in denen folglich die Geschwindigkeit der Konvergenz befriedigend ist:

a)  $C'_2$  enthält einen nicht zu kleinen Anteil an Randpunkten von  $G'$ , das heisst, es existieren genügend viele Randpunkte mit einer Randbedingung erster Art. Für solche Punkte verschwindet  $\delta_v$  in (18. 8) und  $\eta_v$  in (7. 4), so dass die Behauptung über  $\Theta$  unmittelbar folgt.

b) Die in (6. 3) definierte Summe  $G(x, y)$  ist für innere Gitterpunkte wesentlich kleiner als 1. In diesem Falle folgt die Kleinheit von  $\Theta$  ohne weiteres aus dem Beweis von Hilfssatz 7. Damit aber  $G(x, y)$  hinreichend klein ausfällt, genügt es nach den Betrachtungen in Abschnitt 6, dass die in (2. 3) eingeführte Grösse  $\beta = 4 - c h^2$  merklich grösser als 4 sei. Somit muss der Koeffizient  $c$  in der Differentialgleichung (1. 1) wesentlich kleiner als Null vorausgesetzt werden. Man erkennt jedoch, dass der Vorteil bei kleiner Gitterseite  $h$  verlorengeht.

c) Der in (3. 6) eingeführte Koeffizient  $H$  ist in den Punkten von  $C'_1$  erheblich grösser als 1. Wegen (3. 8) ist  $H = 1 + \sigma h h(s)$ . In diesem Fall muss also



der Koeffizient  $h(s)$  der Randbedingung (1. 2) auf  $C_1$  wesentlich grösser als Null sein. Wie bei  $b$  fällt aber der Vorteil der raschen Konvergenz dahin, wenn die Gitterseite  $h$  hinreichend klein ist.

*Zusammenfassend* kann man sagen: *Bei grobem Gitter kann die Geschwindigkeit der Konvergenz aus mehreren Gründen gut sein. Ist man aber zur Erhöhung der Genauigkeit auf ein feineres Gitter angewiesen, so sinkt die Geschwindigkeit der Konvergenz mit abnehmender Gitterseite  $h$ . Sie bleibt befriedigend, wenn der Anteil der Randpunkte mit einer Randbedingung erster Art hinreichend gross ist.*

Bei einem konkret vorliegenden Beispiel lässt sich allerdings der Konvergenzgrad durch geschickte Massnahmen erheblich steigern. Man verbessert im Laufe des Verfahrens die Randwerte so, dass die Residuen  $R_n$  am Rande nach der Reduktion der Residuen im Innern nicht einseitig positiv oder negativ ausfallen. Dann lässt sich die Abschätzung in (18. 8) verschärfen, so dass sich ein kleinerer Wert für  $\Theta$  ergibt.

20. Bis jetzt haben wir in § 3 mit einem festen Gitter gearbeitet. Bei einem numerischen Beispiel wird man aber *die Gitterseite schrittweise verkleinern*. Ein grobes Gitter mit bloss etwa 30 bis 60 Gitterpunkten dient dazu, dem Rechner eine erste Orientierung über den Verlauf der Lösungsfunktion zu geben. Bei der Approximation der Randkurve sind die Regeln von Abschnitt 2 und 3, soweit es die beschränkte Punktzahl zulässt, einzuhalten. Zur Erleichterung wird man anfänglich die Gitterfunktion bloss zwei- oder dreistellig wählen. Die Residuen sind zu reduzieren, bis sie nur noch eine oder zwei Einheiten der letzten mitgeführten Dezimalen betragen und bis nirgends mehr «gefährliche» Blöcke mit vorwiegend positiven oder negativen Residuen vorhanden sind<sup>1)</sup>.

Die Verfeinerung des Gitters wird am besten dadurch vorgenommen, dass man *die Gitterseite  $h$  halbiert*. Auf diese Weise kommen zu den alten Gitterpunkten noch ungefähr dreimal so viele neue hinzu. Die Approximation der Randkurve hat von neuem zu erfolgen, wobei die Regeln von Abschnitt 2 und 3 im allgemeinen leichter eingehalten werden können als beim grösseren Gitter. Als Rohwerte für die neue Gitterfunktion benütze man in den alten Gitterpunkten die bei der ersten Approximation erhaltenen Werte. In den neuen inneren Gitterpunkten aber ermittle man die Rohwerte aus den schon bekannten durch Interpolation oder besser durch geschickte Benützung der Relation  $l(u) = \gamma$ . Dann beginnt wieder die Reduktion der Residuen usw.

Bei fortschreitender Verfeinerung des Gitters muss die Rechengenauigkeit durch Hinzunahme weiterer Dezimalstellen erhöht werden, da sonst die Abrundungsfehler eine verhängnisvolle Rolle spielen werden. In welchem Ausmass dies zu geschehen hat, wird in Abschnitt 22 noch untersucht werden.

21. Besonders günstig steht es um die Möglichkeit von *Rechenkontrollen*. Während der Reduktion der Residuen können sich Rechenfehler bei der beträchtlichen Zahl der in den Rechenprozess eingehenden Werte verhältnis-

<sup>1)</sup> Vgl. Fussnote 1 auf Seite 186.

mässig leicht einstellen. Zum Zweck ihrer Eliminierung berechne man von Zeit zu Zeit die Residuen aus (16. 1) und (16. 2) neu. Fast unfehlbar wird dabei jedes Versehen entdeckt.

Aus diesem Grunde zeichnet sich das Differenzenverfahren und das darauf fussende Relaxationsverfahren vor anderen numerischen Verfahren dadurch aus, dass man im Laufe des Approximationsprozesses immer wieder von vorne beginnt und nicht auf schon erhaltenen, möglicherweise mit Fehlern behafteten Werten endgültig aufbauen muss.

22. Wie schon in Abschnitt 20 angedeutet wurde, spielen die *Abrundungsfehler* eine erhebliche Rolle. Da man nur eine beschränkte Zahl von Dezimalstellen mitführen kann, so wird jede Gitterlösung  $u(x, y)$  notwendig mit gewissen von Null verschiedenen Residuen (16. 1) im Innern und von Residuen (16. 2) am Rande behaftet sein. Man kann aus deren Kleinheit nicht unmittelbar auf die Güte der Approximation schliessen, wie manche Autoren anzunehmen scheinen. Es können sich vielmehr trotz winziger Residuen unter Umständen Näherungslösungen einstellen, welche von der gesuchten Gitterlösung auffällig verschieden sind. Darauf hat schon F. WOLF [24] in anschaulicher Weise aufmerksam gemacht.

Zur Beurteilung der zu erwartenden Fehler gehen wir ähnlich wie S. GERSCHGORIN [10] vor. Es mögen im Gittergebiet  $G'$   $u(x, y)$  die exakte und  $u'(x, y)$  die angenäherte Lösung des Gleichungssystems (4. 1) bezeichnen. Wir haben also unter Benützung der in (16. 1) und (16. 2) eingeführten Residuen

$$l(u) = \gamma, \quad l(u') = \gamma + r; \quad L(U) = F, \quad L(U') = F + R. \quad (22. 1)$$

Daraus ergeben sich für die Differenz

$$\delta'(x, y) = u'(x, y) - u(x, y) \quad (22. 2)$$

die Relationen

$$l(\delta') = r, \quad L(\delta') = R. \quad (22. 3)$$

Nun können wir auf  $\delta'$  die in § 2 für andere Zwecke entwickelten Abschätzungen anwenden. Setzen wir nämlich

$$r^* = \text{Max}_{G'} |r|, \quad R^* = \text{Max}_{G'} |R|, \quad (22. 4)$$

so haben wir an Stelle von (9. 8) und (12. 3) die Ungleichungen  $|l(\delta')| \leq r^*$ ,  $|L(\delta')| \leq R^*$ . Führt man ganz analog wie in (13. 1) und (13. 2) die Hilfsfunktionen  $z(x, y)$  und  $w(x, y)$  ein, so gelangt man für eine hinreichend kleine Gitterseite  $h$  zu der (13. 3) entsprechenden Abschätzung

$$|\delta'(x, y)| \leq m z(x, y). \quad (22. 5)$$

Nur hat hier  $m$  an Stelle von (14. 2) der Ungleichung

$$m \geq \frac{1}{h^2} \text{Max} (2 r^*, 2 h R^*) \quad (22. 6)$$

zu genügen, weshalb wir

$$m = \frac{1}{h^2} r_M \quad (22. 7)$$

mit einer den maximalen Beträgen der Residuen proportionalen, aber von  $h$  unabhängigen Konstanten  $r_M$  setzen dürfen. (22. 5) geht damit in

$$| \delta'(x, y) | \leq \frac{1}{h^2} r_M z(x, y) \quad (22. 8)$$

über, wo  $z(x, y)$  die Lösung der von  $h$  unabhängigen Randwertaufgabe (13. 1) bezeichnet.

Man wird in einem Zahlenbeispiel die Ungleichung (22. 8) kaum für die Abschätzung von  $\delta'(x, y)$  heranziehen. Einerseits würde sich die Mühe nicht lohnen. Andererseits wäre  $r_M$  zu gross und daher die Schranke (22. 8) zu hoch. Denn beim Relaxationsverfahren kann man die Approximation trotz beschränkter Stellenzahl erheblich weitertreiben, als dies die Abschätzung dieses Abschnitts erwarten liesse. Wie schon erwähnt, sorgt man ja dafür, dass die verbleibenden minimalen Residuen von verschiedenen Vorzeichen sind, ja dass nirgends Blöcke mit vorwiegend positiven oder negativen Residuen stehen bleiben.

Dagegen kann man aus (22. 8) den Einfluss der Verfeinerung des Gitters auf den zu erwartenden Fehler  $\delta'(x, y)$  erkennen. Er ist umgekehrt proportional zum Quadrat der Gitterseite. *Soll also bei Verfeinerung des Gitters der durch Abrundung verursachte Fehler  $\delta'(x, y)$  nicht vergrössert werden, so muss man gleichzeitig die Anzahl der Dezimalen, mit denen man die Werte der Gitterfunktion schreibt, erhöhen. Insbesondere ist beim Übergang zu einem Gitter mit halber Gitterseite die relative Genauigkeit der Gitterwerte zu vervierfachen.*

Wenn man diese Vorsicht walten lässt, so können die Abrundungsfehler die Konvergenz bei Verfeinerung des Gitters nicht in Frage stellen. Deshalb dürfen wir das Differenzenverfahren mit Recht als *abrundungsfest*<sup>1)</sup> bezeichnen.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. COLLATZ, *Bemerkungen zur Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren bei partiellen Differentialgleichungen*, Z. angew. Math. Mech. 13, 56–57 (1933).
- [2] L. COLLATZ, *Über das Differenzenverfahren bei Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen*, Z. angew. Math. Mech. 16, 239–247 (1936).

<sup>1)</sup> Der Begriff der Abrundungsfestigkeit wurde von A. OSTROWSKI [14] geschaffen.



- [3] L. COLLATZ, *Über die Konvergenzkriterien bei Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme*, Math. Z. 53, 149–161 (1950).
- [4] R. COURANT, *Über Randwertaufgaben bei partiellen Differenzengleichungen*, Z. angew. Math. Mech. 6, 322–325 (1926).
- [5] R. COURANT, K. FRIEDRICHS, H. LEWY, *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Math. Ann. 100, 32–74 (1928).
- [6] H. W. EMMONS, *The Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Quart. appl. Math. 2, 173–195 (1944).
- [7] L. FOX, *Solution by Relaxation Methods of Plane Potential Problems with Mixed Boundary Conditions*, Quart. appl. Math. 2, 251–257 (1944).
- [8] L. FOX, *The Numerical Solution of Elliptic Differential Equations when the Boundary Conditions Involve a Derivative*, Philos. Trans. Roy. Soc. London [A] 242, 345–378 (1950).
- [9] S. P. FRANKEL, *Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential Equations*, MTAC 4, 65–75 (1950).
- [10] S. GERSCHGORIN, *Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen*, Z. angew. Math. Mech. 10, 373–382 (1930).
- [11] H. LIEBMAN, *Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen*, Sitz.-Ber. bayr. Akad. Wiss. München, math.-phys. Klasse, 1918, 385–416.
- [12] R. VON MISES und H. POLLACZEK-GEIRINGER, *Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung*, Z. angew. Math. Mech. 9, 58–77, 152–164 (1929).
- [13] D. MOSKOVITZ, *The Numerical Solution of Laplace's and Poisson's Equations*, Quart. appl. Math. 2, 148–163 (1944).
- [14] A. OSTROWSKI, *Über die Konvergenz und die Abrundungsfestigkeit des Newtonschen Verfahrens*, Recueil Math. 2, 1073–1095 (1937).
- [15] H. B. PHILLIPS und N. WIENER, *Nets and the Dirichlet problem*, J. Math. Phys. Massachusetts 2, 105–124 (1923).
- [16] L. F. RICHARDSON, *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam*, Phil. Trans. Roy. Soc. London [A] 210, 307–357 (1910).
- [17] C. RUNGE, *Über eine Methode, die partielle Differentialgleichung  $\Delta u = \text{constant}$  numerisch zu integrieren*, Z. Math. Phys. 56, 225–232 (1908).
- [18] G. H. SHORTLEY und R. WELLER, *The Numerical Solution of Laplace's Equation*, J. appl. Phys. 9, 334–348 (1938).
- [19] G. SHORTLEY, R. WELLER, P. DARBY und E. H. GAMBLE, *Numerical Solution of Axisymmetrical Problems, with Applications to Electrostatics and Torsion*, J. appl. Phys. 18, 116–129 (1947).
- [20] R. V. SOUTHWELL und G. VAISEY, *Relaxation Methods Applied to Engineering Problems, VIII: Plane-Potential Problems Involving Specified Normal Gradients*, Proc. Roy. Soc. London [A] 182, 129–151 (1943).
- [21] R. V. SOUTHWELL, *Relaxation Methods in Theoretical Physics* (Clarendon Press, Oxford 1946).
- [22] E. STIEFEL, *Über einige Methoden der Relaxationsrechnung*, Z. angew. Math. Phys. 3, 1–33 (1952).
- [23] G. TEMPLE, *The General Theory of Relaxation Methods Applied to Linear Systems*, Proc. Roy. Soc. London [A], 169, 476–500 (1939).
- [24] F. WOLF, *Über die angenäherte numerische Berechnung harmonischer und biharmonischer Funktionen*, Z. angew. Math. Mech. 6, 118–150 (1926).

*Summary*

Partial differential equations of the elliptic type are practically solved by finite-difference approximation. If the *boundary conditions involve derivatives*, the approximation by finite differences can be a serious problem. In this paper it is shown how the normal derivative may be approximated for a curved boundary without any corner. The finite-difference solutions converge to the exact solution of the differential equation while the mesh-side tends to zero. This is proved under certain conditions. The method used is similar to that given by S. GERSCHGORIN. The convergence rate is discussed in detail. The final part of the paper is concerned with the relaxation technique. It is proved that the residuals for inner and for boundary points converge to zero. Finally the rounding errors are discussed.

(Eingegangen: 25. 10. 1951.)

## Zur numerischen Bestimmung periodischer Lösungen bei nichtlinearen Schwingungen

VON LOTHAR COLLATZ, Hannover<sup>1)</sup>

### 1. Die Randwertaufgabe

Bei der Bestimmung periodischer Lösungen bei nichtlinearen Schwingungen liegen nichtlineare Randwertaufgaben vor. Man hat für eine oder allgemeiner für  $n$  unbekannte Funktionen  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  (etwa von einer unabhängigen Veränderlichen  $t$ )  $n$  Differentialgleichungen, welche entweder  $t$  explizit gar nicht enthalten mögen oder, falls  $t$  explizit auftritt, in  $t$  die Periode  $T$  besitzen mögen, und Randbedingungen der Periodizität, etwa für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, angeschrieben:

$$x_j(t) = x_j(t + T), \quad \dot{x}_j(t) = \dot{x}_j(t + T). \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1)$$

Die Periode  $T$  des Vorganges wird häufig (zum Beispiel bei erzwungenen Schwingungen meistens) bekannt sein, andernfalls ist sie als weitere Unbekannte einzuführen (vgl. Nr. 5).

Will man mit einem Näherungsansatz eine angenäherte Lösung ermitteln, so erhält man im allgemeinen für die beim Näherungsansatz noch verfügbaren Parameter ein System von etwa  $q$  nichtlinearen Bestimmungsgleichungen. Dieses zu lösen, ist meist eine mühsame Aufgabe, besonders bei grösseren Werten von  $q$ . Daher sind möglichst genaue Verfahren erwünscht, bei denen

<sup>1)</sup> Lehrstuhl für höhere Mathematik der Technischen Hochschule.

man schon mit wenigen Parametern und also mit einem nicht zu grossen nicht-linearen Gleichungssystem benutzbare Werte erhält. Die folgenden Verfahren wird man jedoch nur anwenden, wenn die in der Differentialgleichung auftretenden Funktionen und die Lösungsfunktion genügend «glatt» sind und stetige Ableitungen so hoher Ordnung wie die des unterdrückten Restgliedes besitzen.

## 2. Kollokation mit Relaxation

Zur Behandlung grösserer nichtlinearer Gleichungssysteme wird man oft Iterationsverfahren benutzen; gute Erfolge zeigt dabei das Relaxationsverfahren. Durch einen vorläufigen gröberen Näherungsansatz mit wenigen Parametern verschafft man sich einen Überblick über die Lösungen und hat dann bei der genaueren Rechnung bereits Ausgangswerte, die man iterativ verbessert. Das Verfahren sei im Zusammenhang mit der Kollokation, einem naheliegenden Näherungsverfahren, hier nochmals kurz beschrieben, da die Relaxation auch noch im nächsten Abschnitt gebraucht wird. Es sei  $w_j(t)$  eine Näherungsfunktion für  $x_j(t)$ . Für  $w_j$  macht man zum Beispiel einen Ansatz eines endlichen trigonometrischen Polynoms:

$$x_j(t) \approx w_j(t) = \sum_{r=0}^p \left( c_{rj} \cos \frac{2\pi r}{T} t + s_{rj} \sin \frac{2\pi r}{T} t \right) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2)$$

(mit  $s_{0j} = s_{pj} = 0$ ); für die  $2np$  unbekannten Fourier-Koeffizienten  $c_{rj}$  und  $s_{rj}$  erhält man  $2np$  Bestimmungsgleichungen, indem man verlangt, dass die  $n$  Differentialgleichungen, wenn man  $w_j$  für  $x_j$  einsetzt, an  $2p$  Stellen, den «Kollokationsstellen»

$$t = 0, \quad \frac{T}{2p}, \quad \frac{2T}{2p}, \quad \dots, \quad \frac{(2p-1)T}{2p},$$

erfüllt sind.

*Beispiel:* Es sei die Gleichung

$$\ddot{x} + \dot{x} + (x + x^3) = \cos t \quad (3)$$

(erzwungene Schwingung eines eingliedrigen gedämpften Schwingers mit nicht-linearer Rückstellkraft) vorgelegt. Der Ansatz [unter Ausnutzung der Schief-symmetrie  $x(t + \pi) = -x(t)$ ]

$$x(t) \approx w(t) = c_1 \cos t + s_1 \sin t \quad (4)$$

führt mit den Kollokationsstellen 0 und  $\pi/2$  auf

$$s_1 + c_1^3 = 1, \quad -c_1 + s_1^3 = 0$$



mit der Lösung

$$c_1 = 0,560, \quad s_1 = 0,825. \quad (5)$$

Bei dem Ansatz mit vier Parametern

$$w(t) = c_1 \cos t + s_1 \sin t + c_3 \cos 3t + s_3 \sin 3t \quad (6)$$

und den Kollokationsstellen  $t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$  erhält man das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} s_1 - 8c_3 + 3s_3 + (c_1 + c_3)^3 &= 1, \\ -c_1 + s_1 + 5c_3 - 11s_3 + \frac{1}{2}(c_1 + s_1 - c_3 + s_3)^3 &= 1, \\ -c_1 + 3c_3 + 8s_3 + (s_1 - s_3)^3 &= 0, \\ c_1 - s_1 - 11c_3 - 5s_3 + \frac{1}{2}(-c_1 + s_1 + c_3 + s_3)^3 &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

oder mit

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= \alpha; & c_1 + s_1 - c_3 + s_3 &= \beta; \\ s_1 - s_3 &= \gamma; & -c_1 + s_1 + c_3 + s_3 &= \delta; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha^3 - 1 + 4\alpha + 3\beta - \gamma - \delta &= 0, \\ \beta^3 - 2 + 4\alpha - 8\beta + 12\gamma - 2\delta &= 0, \\ \gamma^3 + \alpha + \beta - 4\gamma + 3\delta &= 0, \\ \delta^3 + 2 - 12\alpha + 2\beta + 4\gamma - 8\delta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Das folgende Schema (Tabelle 1) zeigt die Durchführung der Relaxationsrechnung. Es wird ausgegangen von den Werten

$$c_1 = 0,55, \quad s_1 = 0,8, \quad c_3 = 0, \quad s_3 = 0,$$

die nach (5) durch die gröbere Rechnung mit  $c_1$  und  $s_1$  nahegelegt werden; dann rechnet man jeweils die linken Seiten der Gleichungen (8), die «Funktionswerte», aus und stellt fest, wo sie noch am stärksten vom Wert Null abweichen. Nun werden an den Ausgangswerten  $c_1, s_1, c_3, s_3$  kleine Änderungen (im Schema eingeklammert angegeben) angebracht und die neuen Funktionswerte und die erfolgten «Änderungen der Funktionswerte» ausgerechnet. Diese Änderungen der Funktionswerte erlauben es, die Dosierung der Änderungen der Ausgangswerte geeignet vorzunehmen, so dass die Funktionswerte sich dem Wert Null nähern. Ein grobes Gesamtmaß für die Güte der Näherung ist die im Schema als «Spanne» bezeichnete Summe der Beträge der Funktionswerte.

Tabelle 1

| $\alpha$            | $\beta$ | $\gamma$            | $\delta$ | $\alpha^3$ | $\beta^3$ | $\gamma^3$ | $\delta^3$ | $A^1)$  | $B^2)$  |
|---------------------|---------|---------------------|----------|------------|-----------|------------|------------|---------|---------|
| 0,55                | 1,35    | 0,80                | 0,25     | 0,17       | 2,46      | 0,51       | 0,02       | -0,20   | 1,50    |
| 0,55                | 1,35    | (-0,05)<br>0,75     | 0,25     | 0,17       | 2,46      | 0,42       | 0,02       | -0,15   | -2,10   |
| (-0,07)<br>0,48     | 1,35    | 0,75                | 0,25     | 0,11       | 2,46      | 0,42       | 0,02       | 0,13    | -2,38   |
| 0,42                | 1,22    | 0,74                | 0,30     | 0,074      | 1,816     | 0,405      | 0,027      | -0,06   | -1,80   |
| 0,408               | 1,206   | 0,741               | 0,314    | 0,0679     | 1,7540    | 0,4069     | 0,0310     | -0,069  | -1,752  |
| (-0,0001)<br>0,4079 | 1,206   | (-0,0001)<br>0,7409 | 0,314    | 0,0679     | 1,7540    | 0,4067     | 0,0310     | -0,0685 | -1,7536 |

<sup>1)</sup>  $A = -1 - 4\alpha + 3\beta - \gamma - \delta$ . <sup>2)</sup>  $B = -2 + 4\alpha - 8\beta + 12\gamma - 2\delta$ .

Ergebnis:

|                                | Erste<br>mit<br>$c_1, s_1$ | Zweite<br>Näherung<br>bis<br>$c_3, s_3$ | Dritte<br>bis<br>$c_5, s_5$ |
|--------------------------------|----------------------------|---|-----------------------------|
| $x(0)$                         | 0,56                       | 0,408                                   | 0,392                       |
| $x\left(\frac{\pi}{4}\right)$  | 0,98                       | 0,853                                   | 0,832                       |
| $x\left(\frac{\pi}{2}\right)$  | 0,825                      | 0,741                                   | 0,759                       |
| $x\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ | 0,19                       | 0,222                                   | 0,221                       |

### 3. Gewöhnliches und verbessertes Differenzenverfahren

Bei allen Arten von Differenzenverfahren legt man eine Intervallteilung zugrunde, etwa eine Teilung des Periodenintervalls in  $m$  gleiche Teile der Länge  $h = T/m$  und stellt Bestimmungsgleichungen für Grössen  $x_{j\varrho}$  auf, welche Näherungswerte für  $x_j(\varrho h)$  (für  $\varrho = 0, 1, \dots, m-1$ ) sein sollen. Das gewöhnliche Differenzenverfahren erscheint für den vorliegenden Zweck wenig geeignet. Bei ihm werden die Differentialgleichungen für  $t = \varrho h$  angeschrieben und dabei alle in den Differentialgleichungen vorkommenden Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt. Bei grosser Maschenweite  $h$  und geringer

Tabelle 1

| $C^3)$   | $D^4)$  | Funktionswerte |               |                |                | Änderungen<br>der Funktionswerte |         |        |        | Spanne |
|--|---------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------------------------|---------|--------|--------|--------|
|  |         | $A + \alpha^3$ | $B + \beta^3$ | $C + \gamma^3$ | $D + \delta^3$ |                                  |         |        |        |        |
| -0,55  | -0,70   | -0,03          | 0,96          | -0,04          | -0,68          |                                  |         |        |        | 1,71   |
| -0,35  | -0,90   | 0,02           | 0,36          | 0,07           | -0,88          | 0,05                             | -0,60   | 0,11   | -0,20  | 1,33   |
| -0,42  | -0,06   | 0,24           | 0,08          | 0              | -0,04          | 0,22                             | -0,28   | -0,07  | 0,84   | 0,36   |
| -0,42  | -0,04   | 0,014          | 0,016         | -0,015         | -0,013         |                                  |         |        |        | 0,058  |
| -0,408   | -0,032  | -0,0011        | 0,0020        | -0,0011        | -0,0010        |                                  |         |        |        | 0,0052 |
| -0,4077  | -0,0312 | -0,0006        | 0,0004        | -0,0010        | -0,0002        | 0,0005                           | -0,0016 | 0,0001 | 0,0008 | 0,0022 |
| <sup>3)</sup> $C = \alpha + \beta - 4\gamma + 3\delta$ . <sup>4)</sup> $D = 2 - 12\alpha + 2\beta + 4\gamma - 8\delta$ . |         |                |               |                |                |                                  |         |        |        |        |

Anzahl von Unbekannten werden die erhaltenen Näherungen dabei oft viel zu grob (vergleiche das folgende Beispiel), und eine Maschenverfeinerung ist gerade bei den nichtlinearen Aufgaben wegen des Anwachsens der Unbekanntenzahl ungünstig.

Als eine der verschiedenen möglichen Verbesserungen des Differenzenverfahrens wäre das Mehrstellenverfahren<sup>1)</sup> zu nennen.

Wir beschränken uns bei der Beschreibung etwa auf eine unabhängige Funktion  $x(t)$ . Man verwendet Ausdrücke der Bauart

$$P = \sum_{v=i-p}^{i+p} a_v x_{(v)} + A_v x_{(v)}^{(k)}, \quad (9)$$

wobei bei einer fest gewählten  $k$ -ten Ableitung die  $a_v$  und  $A_v$  so bestimmt werden, dass bei Taylor-Entwicklung der Werte  $x_{(v)} = x(vh)$  und Ableitungen  $x_{(v)}^{(k)} = x^{(k)}(vh)$  und damit des Ausdrucks  $P$  an der Stelle  $t_i = ih$  die Ableitungen bis zu möglichst hoher Ordnung den Faktor Null erhalten, das heisst das Restglied von möglichst hoher Ordnung wird. Für die erste und zweite Ableitung zum Beispiel kann man so die Ausdrücke aufstellen

$$x_{(i-1)} - x_{(i+1)} + \frac{h}{3} (\dot{x}_{(i-1)} + 4\dot{x}_{(i)} + \dot{x}_{(i+1)}) = \text{Restglied 5. Ordnung} \quad (10)$$

$$12(x_{(i-1)} - 2x_{(i)} + x_{(i+1)}) - h^2(\ddot{x}_{(i-1)} + 10\ddot{x}_{(i)} + \ddot{x}_{(i+1)}) = \text{Restglied 6. Ordnung} \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Vergleiche zum Beispiel die zusammenfassende Darstellung bei L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951), S. 116.



Kommen in der Differentialgleichung zum Beispiel die Grössen  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  vor, so hat man für jede der  $m$  Stellen  $t = qh$  die Mehrstellengleichungen mit  $k = 1$  und 2 (wobei das Restglied durch Null und  $x_{(j)}$  und  $x_{(j)}^{(k)}$  durch Näherungen  $x_j$ ,  $x_j^{(k)}$  zu ersetzen sind) und die Differentialgleichung anzuschreiben und erhält so  $3m$  Gleichungen für die  $3m$  Unbekannten  $x_j$ ,  $\dot{x}_j$ ,  $\ddot{x}_j$ . Im folgenden soll eine Modifikation beschrieben werden, nach der man in vielen Fällen unmittelbar auf ein Gleichungssystem von nur  $m$  Gleichungen für  $m$  Unbekannte geführt wird. Diese Modifikation ist stets durchführbar, wenn die Differentialgleichung sich auf die Gestalt bringen lässt:

$$L[x] = N[x^{(l)}, t], \quad (12)$$

wobei  $L[x]$  ein linearer Differentialausdruck in  $x$  und seinen Ableitungen mit konstanten Koeffizienten und  $N$  eine beliebige (nichtlineare) Funktion von  $t$  und einer festen Ableitung  $x^{(l)}$  ist. Viele bei nichtlinearen Schwingungsaufgaben auftretende Differentialgleichungen lassen sich auf diese Form bringen. Dann verwendet man Ausdrücke der Gestalt

$$P = \sum_{v=i-p}^{i+p} (a_v L[x_{(v)}] + A_v x_{(v)}^{(l)}) \quad (13)$$

und bestimmt wieder die  $a_v$  und  $A_v$  so, dass bei Taylor-Entwicklung von  $P$  an der Stelle  $t_i = ih$  das Restglied von möglichst hoher Ordnung wird. Bei Unterdrückung des Restgliedes und Einsetzen der Differentialgleichung erhält man  $m$  Gleichungen für die  $m$  Unbekannten  $x_0^{(l)}$ ,  $x_1^{(l)}$ , ...,  $x_{m-1}^{(l)}$ :

$$\sum_{v=i-p}^{i+p} (a_v N[x_v^{(l)}, t] + A_v x_v^{(l)}) = 0. \quad (i = 0, \dots, m-1) \quad (14)$$

Bei Schwingungsaufgaben werden für  $L[x]$  oft Linearkombinationen aus  $\ddot{x}$  und  $\dot{x}$  oder  $\ddot{x}$  und  $x$  in Betracht kommen; daher seien hier als vielleicht wichtigste Fälle die beiden Formeln (15) und (18) angegeben, wobei wir  $i = 0$  wählen (die Ausrechnung der Taylor-Entwicklungen kann hier unterdrückt werden):

Für  $L[x] = \ddot{x} + s \dot{x}$  (beliebige Konstante  $s$ ) gilt mit  $sh = \sigma$

$$\left. \begin{aligned} & (72 + 36\sigma + 3\sigma^3) x_{-1} + 144 x_0 + (72 + 36\sigma - 3\sigma^3) x_1 \\ & + h^2 \{ (-6 + 3\sigma + \sigma^2) L[x]_{-1} + (-60 + 4\sigma^2) L[x]_0 \\ & + (-6 - 3\sigma + \sigma^2) L[x]_1 \} = \text{Restglied 5. Ordnung.} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Diese Formel ist geeignet für Schwinger mit linearer Dämpfung und nichtlinearer Rückstellkraft, also für Differentialgleichungen

$$\ddot{x} + s \dot{x} + f(x) = P(t).$$

Für  $s \rightarrow \infty$  und  $s = 0$  sind hier die obigen Formeln (10) und (11) als Spezialfälle enthalten [allerdings zeigt sich dabei in (11), dass in der Taylor-Entwicklung die Glieder 5. Ordnung fortfallen und das Restglied von 6. Ordnung wird]. Für  $\sigma = 2$  ergibt sich die nachher beim Beispiel gebrauchte Formel

$$6(x_{-1} - 6x_0 + 5x_1) + h^2 \{L[x]_{-1} - 11L[x]_0 - 2L[x]_1\} = \text{Restglied 5. Ordnung.} \quad (16)$$

Für  $L[x] = \ddot{x} + s \dot{x}$  lautet eine genauere Formel:

$$\left. \begin{aligned} & (3\sigma^3 - 11\sigma^2 - 45\sigma + 45)x_{-2} + (84\sigma^3 - 16\sigma^2 - 360\sigma + 720)x_{-1} \\ & + (54\sigma^2 - 1530)x_0 + (-84\sigma^3 - 16\sigma^2 + 360\sigma + 720)x_1 \\ & + (-3\sigma^3 - 11\sigma^2 + 45\sigma + 45)x_2 + 12h^2 \{ (3\sigma^2 + 5\sigma - 10)L[x]_{-1} \\ & + (9\sigma^2 - 55)L[x]_0 + (3\sigma^2 - 5\sigma - 10)L[x]_1 \} = \text{Restglied 7. Ordnung} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

mit den Spezialfällen

$$\begin{aligned} \sigma = 0: & \quad 3(x_{-2} + 16x_{-1} - 34x_0 + 16x_1 + x_2) - 4h^2(2\ddot{x}_{-1} + 11\ddot{x}_0 + 2\ddot{x}_1) \\ & = \text{Restglied 8. Ordnung,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s \rightarrow \infty: & \quad x_{-2} + 28x_{-1} - 28x_1 - x_2 + 12h(\dot{x}_{-1} + 3\dot{x}_0 + \dot{x}_1) \\ & = \text{Restglied 7. Ordnung.} \end{aligned}$$

Ferner sei genannt für  $L[x] = \ddot{x} + s x$

$$\left. \begin{aligned} & (-12 + 4sh^2)\dot{x}_0 + (6 + sh^2)(\dot{x}_{-1} + \dot{x}_1) \\ & + 3h\{(\ddot{x} + sx)_{-1} - (\ddot{x} + sx)_1\} = \text{Restglied 5. Ordnung.} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Diese Formel ist brauchbar bei Schwingern mit nichtlinearer Dämpfung und linearer Rückstellkraft:

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + s x = P(t).$$

Für  $s \rightarrow \infty$  erhält man wieder die obige Formel (10), für  $s = 0$  folgt

$$2(\dot{x}_{-1} - 2\dot{x}_0 + \dot{x}_1) + h(\ddot{x}_{-1} - \ddot{x}_1) = \text{Restglied 5. Ordnung.}$$

Die vieluntersuchte Gleichung

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + c x = r(t) \quad (19)$$

hat nicht unmittelbar die Gestalt (12), lässt sich aber auf diese Gestalt umschreiben, indem man

$$x(t) = \dot{z}(t) \quad \text{und} \quad \int_{x_0}^x f(x) dx = F(x), \quad \int_{t_0}^t r(t) dt = R(t)$$

setzt. Die Gleichung

$$\ddot{z} + \frac{d}{dt} (F(\dot{z})) + c \dot{z} = r(t) \quad (20)$$

lässt sich einmal integrieren:

$$\dot{z} + F(\dot{z}) + c z = C + R(t), \quad (21)$$

wobei die Konstante  $C$  belanglos ist, da eine additive Konstante bei  $z$  die Funktion  $x(t)$  nicht beeinflusst; man kann also zum Beispiel  $C = 0$  setzen. Gleichung (21) hat nun die Form (12) und kann mit der Formel (18) behandelt werden; in dieser Formel treten dann die Grössen  $\dot{z}$ , also die interessierenden Werte  $x$ , aber nicht  $z$  selbst auf.

#### 4. Beispiel

Es werde die Anwendung auf ein System beschrieben:

$$\ddot{x} + 2 \dot{x} + f(x) + x - y = 0, \quad 2 \ddot{y} + y - x = \cos \frac{\pi}{2} t \quad (22)$$

(Schwingungsanordnung nach Figur 1). Die Rückstellkraft werde hier durch



Fig. 1

Schematische Schwingungsanordnung zu dem Beispiel in Nr. 4.

$f(x) = x + \varrho x^2$  festgelegt, wobei für  $\varrho = 0$  eine lineare Aufgabe entsteht mit der periodischen Lösung:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0,0055 \cos \frac{\pi}{2} t - 0,0805 \sin \frac{\pi}{2} t, \\ y &= -0,2555 \cos \frac{\pi}{2} t + 0,0205 \sin \frac{\pi}{2} t. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Wir legen der Rechnung die (noch sehr grobe) Maschenweite  $h = 1$  zugrunde und haben dann für  $x$  und  $y$  jeweils vier unbekannte Funktionswerte, die wir hier kurz mit  $a, b, \dots, \delta$  bezeichnen:

$$\begin{array}{cccccc} t: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ x: & a & b & c & d & a \\ y: & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \alpha \end{array}$$



Das gewöhnliche Differenzenverfahren führt dann auf acht Gleichungen, wobei wir von jedem Satz von vier Gleichungen nur die zu  $t = 0$  gehörige Gleichung anschreiben:

$$\begin{aligned} (-2a + b + d) + (b - d) + (a + \varrho a^2) + a - \alpha &= 0, \\ (-4\alpha + 2\beta + 2\delta) + \alpha - a &= 1. \end{aligned}$$

Aus den letzten vier linearen Gleichungen drücken wir  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  durch  $a, b, c, d$  aus:

$$\begin{aligned} 21\alpha &= -7 + a + 6b + 8c + 6d, \\ 21\beta &= 6a + b + 6c + 8d, \\ 21\gamma &= 7 + 8a + 6b + c + 6d, \\ 21\delta &= 6a + 8b + 6c + d \end{aligned}$$

und erhalten entsprechend vier Gleichungen für  $a, b, c, d$ :

$$\begin{aligned} 21\varrho a^2 + 7 - a + 36b - 8c - 6d &= 0, \\ 21\varrho b^2 - 6a - b + 36c - 8d &= 0, \\ 21\varrho c^2 - 7 - 8a - 6b - c + 36d &= 0, \\ 21\varrho d^2 + 36a - 8b - 6c - d &= 0. \end{aligned}$$

Da wir die Ergebnisse mit denen des genaueren Verfahrens vergleichen wollen, führen wir gleich noch die Rechnung mit Benutzung der Formeln (15) und (18) vor. Auch hier hat man zwei Sätze von je vier Gleichungen, von denen wir jeweils die erste Gleichung hinschreiben:

$$\begin{aligned} -36a + 30b + 6d - 11\alpha + 22a + 11\varrho a^2 - 2\beta + 4b \\ + 2\varrho b^2 + \delta - 2d - \varrho d^2 &= 0, \\ \text{oder } \varrho(11a^2 + 2b^2 - d^2) - 14a + 34b + 4d - 11\alpha - 2\beta + \delta &= 0, \\ \text{und } -48\alpha + 24\beta + 24\delta - 10a + 10\alpha - 10 - b + \beta - d + \delta &= 0. \end{aligned}$$

Wieder drückt man zunächst die  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  durch  $a, b, c, d$  aus:

$$\left. \begin{aligned} 209\alpha &= -55 + 20a + 57b + 75c + 57d, \\ 209\beta &= 57a + 20b + 57c + 75d, \\ 209\gamma &= 55 + 75a + 57b + 20c + 57d, \\ 209\delta &= 57a + 75b + 57c + 20d \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

und erhält einsetzend vier Gleichungen für  $a, b, c, d$ :

$$\begin{aligned}
 209 \varrho (11 a^2 + 2 b^2 - d^2) + 605 - 3203 a + 6514 b - 882 c + 79 d &= 0, \\
 209 \varrho (-a^2 + 11 b^2 + 2 c^2) - 165 + 79 a - 3203 b + 6514 c - 882 d &= 0, \\
 209 \varrho (-b^2 + 11 c^2 + 2 d^2) - 605 - 882 a + 79 b - 3203 c + 6514 d &= 0, \\
 209 \varrho (2 a^2 - c^2 + 11 d^2) + 165 + 6514 a - 882 b + 79 c - 3203 d &= 0;
 \end{aligned}$$

es empfiehlt sich für die folgende Relaxation, diese Gleichungen nach  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ ,  $d^2$  aufzulösen. Dann erhält man

$$\left. \begin{aligned}
 13585 \varrho a^2 + 3575 - 15512 a + 40185 b - 12399 c + 1311 d &= 0, \\
 13585 \varrho b^2 &+ 1311 a - 15512 b + 40185 c - 12399 d = 0, \\
 13585 \varrho c^2 - 3575 - 12399 a + 1311 b - 15512 c + 40185 d &= 0, \\
 13585 \varrho d^2 &+ 40185 a - 12399 b + 1311 c - 15512 d = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Es wurde zunächst der lineare Fall ( $\varrho = 0$ ) durchgerechnet und die Werte mit der exakten Lösung verglichen. Die Tabelle

*Linearer Fall* ( $\varrho = 0$ )  
(Absolute Fehler in Klammern beigelegt)

|        | Exakter Wert | Gewöhnliches<br>Differenzenverfahren | Verbessertes Differenzenverfahren |                   |
|--------|--------------|--------------------------------------|-----------------------------------|-------------------|
|        |              |                                      | nach (16)                         | nach (17)         |
| $x(0)$ | 0,00547      | -0,0270 (-0,0324)                    | 0,0073 ( 0,0018)                  | 0,0073 ( 0,0018)  |
| $x(1)$ | -0,08053     | -0,1622 (-0,0817)                    | -0,0914 (-0,0109)                 | -0,0824 (-0,0019) |
| $y(0)$ | -0,25553     | -0,3243 (-0,0688)                    | -0,2651 (-0,0096)                 | -0,2577 (-0,0022) |
| $y(1)$ | 0,02047      | 0,0541 ( 0,0336)                     | 0,0240 ( 0,0035)                  | 0,0211 ( 0,0007)  |

Tabelle 2

| $a$    | $b$    | $c$    | $d$    | Hilfsspalten ( $N = 13585$ ) |         |         |         | $A^1)$ | $B^2)$ |
|--------|--------|--------|--------|------------------------------|---------|---------|---------|--------|--------|
|        |        |        |        | $N a^2$                      | $N b^2$ | $N c^2$ | $N d^2$ |        |        |
| 0      | -0,1   | 0      | 0,1    | 0                            | 135,85  | 0       | 135,85  | -312,4 | 311,3  |
| 0      | -0,1   | -0,01  | 0,1    | 0                            | 135,85  | 1,4     | 135,85  | -188,4 | -90,6  |
| 0      | -0,1   | -0,01  | 0,09   | 0                            | 135,85  | 1,4     | 110,0   | -201,5 | 33,4   |
| .....  | .....  | .....  | .....  | .....                        | .....   | .....   | .....   | .....  | .....  |
| 0,002  | -0,095 | -0,013 | 0,088  | 0,05                         | 122,5   | 2,3     | 105,0   | 3,0    | -137,3 |
| -0,953 | -1,055 | -1,042 | -0,940 | 12338                        | 15120   | 14750   | 12004   | -12350 | -15102 |

<sup>1)</sup>  $A = 3575 - 15512a + \dots$     <sup>2)</sup>  $B = 1311a + \dots$

zeigt, dass dabei das gewöhnliche Differenzenverfahren recht schlechte Werte liefert und dass die Mehrarbeit bei Aufstellung der Gleichungen (16) sich gelohnt hat. Man wird daher wohl auch im nichtlinearen Fall zu den Formeln (15) und (18) mehr Vertrauen haben dürfen als zum gewöhnlichen Differenzenverfahren. Es ergeben sich zwei periodische Lösungen, das Schema zeigt für  $q = 1$  die Durchführung der Relaxation für die beiden Lösungen. Die Relaxation arbeitet sehr gut, wenn man sich erst einmal in das Verfahren hineingedacht hat. Da die Anlage der Rechnung ganz entsprechend wie beim vorigen Beispiel ist, erübrigt sich eine genauere Beschreibung (siehe Tabelle 2).

Ergebnis der Rechnung:

| $t$ | Erste Lösung |        | - Zweite Lösung |        |
|-----|--------------|--------|-----------------|--------|
|     | $x$          | $y$    | $x$             | $y$    |
| 0   | 0,002        | -0,269 | -0,953          | -1,272 |
| 1   | -0,095       | 0,020  | -1,055          | -0,982 |
| 2   | -0,013       | 0,260  | -1,042          | -0,721 |
| 3   | 0,088        | -0,029 | -0,940          | -1,012 |

5. Beispiel: Periode unbekannt

Ist die Periode  $T$  nicht bekannt, so hat man sie als weitere Unbekannte einzuführen. Dafür kann man, wenn in den Differentialgleichungen die Zeit  $t$  nicht explizit auftritt, den Zeitpunkt  $t = 0$  beliebig festlegen, zum Beispiel in einem Augenblick maximaler Auslenkung einer Grösse etwa  $\dot{x}_1(0) = 0$  wählen. Lediglich zur Erläuterung der Methode werde folgendes einfache Beispiel behandelt:

$$\ddot{x} + (3 \dot{x} - \dot{x}^3) + x = 0 \text{ ,}$$

Tabelle 2

| $C^3)$ | $D^4)$ | Funktionswerte |             |             |             | Änderungen<br>der Funktionswerte |       |       |       | Spanne |
|--------|--------|----------------|-------------|-------------|-------------|----------------------------------|-------|-------|-------|--------|
|        |        | $A + N a^2$    | $B + N b^2$ | $C + N c^2$ | $D + N d^2$ |                                  |       |       |       |        |
| 312,4  | -311,3 | -312           | 447         | 312         | -175        |                                  |       |       |       | 1246   |
| 467,5  | -324,4 | -188,4         | 45,3        | 468,9       | -188,5      | 124                              | -402  | 157   | -13   | 890    |
| 65,6   | -169,3 | -201,5         | 169,3       | 67          | - 59,3      | -13                              | 124   | -402  | 131   | 495    |
| .....  | .....  | .....          | .....       | .....       | .....       | .....                            | ..... | ..... | ..... | .....  |
| 13,6   | -123,8 | 3,0            | -14,8       | 15,9        | - 18,8      |                                  |       |       |       | 53     |
| -14752 | -12000 | -11            | 18          | -3          | 4           |                                  |       |       |       | 36     |

3)  $C = -3575 - 12399a + \dots$     4)  $D = 40185a + \dots$



welches so einfach ist, dass man es für technische Zwecke sonst wohl durch Zurückführung auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung und graphisch mit Hilfe der Liénardschen Konstruktion behandeln würde. Es werde also  $\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$  gesetzt. Bei der ganz groben Maschenweite  $h = T/4$  hat man für die beiden Unbekannten  $h$  und  $\dot{x}(h) = a$  nach (18) die beiden Gleichungen

$$6h(-3a + a^3) = 0, \quad (-12 + 4h^2)a = 0$$

mit der Lösung (die triviale Lösung  $h = a = 0$  lassen wir ausser Betracht)  $h = a = \sqrt{3}$  und  $T = 4h \approx 6,93$ . Diese Werte werden als Ausgangswerte für die Relaxation bei der kleineren Maschenweite  $h = T/12$  benutzt. Für die sechs Unbekannten  $h, \dot{x}(h) = a, \dot{x}(2h) = b, \dot{x}(3h) = c, \dot{x}(4h) = d, \dot{x}(5h) = e$  (vgl. Figur 2) lauten die Gleichungen nach (18)

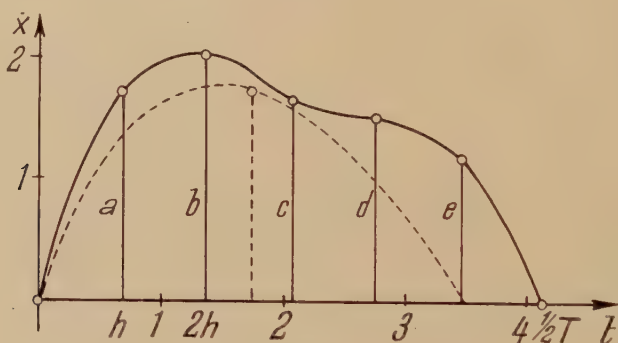


Fig. 2

Verschiedene Näherungen zu dem Beispiel in Nr. 5.

$$\begin{aligned} 3h[-3e + e^3 - 3a + a^3] &+ (6 + h^2)(-e + a) = 0, \\ 3h[-3b + b^3] + (-12 + 4h^2)a + (6 + h^2)(b) &= 0, \\ 3h[3a - a^3 - 3c + c^3] + (-12 + 4h^2)b + (6 + h^2)(a + c) &= 0, \\ 3h[3b - b^3 - 3d + d^3] + (-12 + 4h^2)c + (6 + h^2)(b + d) &= 0, \\ 3h[3c - c^3 - 3e + e^3] + (-12 + 4h^2)d + (6 + h^2)(c + e) &= 0, \\ 3h[3d - d^3] + (-12 + 4h^2)e + (6 + h^2)(d) &= 0. \end{aligned}$$

Im Relaxationsschema wird man  $h, b, d$  als drei Unbekannte einführen. Aus ihnen berechnen sich aus drei der angegebenen sechs Gleichungen die Größen  $a, c, e$ . Zu den jeweils gewählten Werten von  $h, b, d$  bestimmt man die zugehörigen Werte  $a, c, e$  und stellt fest, wie weit die linken Seiten der restlichen drei Gleichungen dann die Zahl Null annähern. Durch Anbringen kleiner Variatio-

nen bei  $h, b, d$  gelangt man schnell zu einer hinreichend genauen Näherungslösung:

$$h = 0,689, \quad a = 1,75, \quad b = 2,02, \quad c = 1,63, \quad d = 1,54, \quad e = 1,19.$$

Figur 2 zeigt den Verlauf dieser Näherungslösung und zum Vergleich gestrichelt auch die grobe Näherung mit  $h = T/4$ .

### Summary

In order to solve a periodic problem, the solution of its boundary value problem is needed. We ask for a method with a high order of accuracy and with nonlinear equations containing only a few unknowns. In this case the use of ordinary finite differences is not recommended. The "Mehrstellenverfahren" uses terms (9) and is always applicable, but gives a nonlinear system with a large number of unknowns. The method described in this paper is applicable for equations (12) and uses the terms (13).  $A_v$  and  $a_v$  are evaluated from the fact that the remaining terms of Taylor's expansion are of an order as high as possible. Equations (15), (16), (17), and (18) are examples of such formulas. Some numerical examples are also given.

(Eingegangen: 29. 11. 1951.)

## Schallgeschwindigkeit in porösen Medien

Von HEINRICH LABHART, Zürich<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

Die Kenntnis der Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Porosität fester Körper ist von vielseitigem Interesse. Einerseits ist es dadurch möglich, durch rasche, serienmäßig durchführbare Messung der Schallgeschwindigkeit auf das Porenvolumen von Festkörpern, insbesondere von Gesteinen und keramischen Massen verschiedenster Art, zu schließen.

Andrerseits ist die Kenntnis der Schallgeschwindigkeit unerlässlich für die Dimensionierung der heute immer mehr an Stelle von Einkristallen als elektromechanische oder magnetomechanische Schwinger verwendeten keramischen Sinterkörper, wie  $\text{BaTiO}_3$  oder magnetostriktive Ferrite.

Kürzlich hat GASSMANN<sup>2)</sup> den Einfluß einer Porenfüllung durch eine kompressible Flüssigkeit auf die elastischen Eigenschaften eines porösen Mediums behandelt. Über den Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul des porösen Materials und demjenigen der homogenen Gerüstsubstanz liegen bisher

<sup>1)</sup> Abteilung für industrielle Forschung des Institutes für technische Physik an der ETH.

<sup>2)</sup> F. GASSMANN, Vjschr. naturf. Ges. Zürich 96, Heft 1 (1951).

nur die Untersuchungen von SQUIRE<sup>1)</sup> und BARTELS<sup>2)</sup> an Sintereisen, von RYSCHKEWITSCH<sup>3)</sup> an keramischen Massen und die erst während der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit erschienenen Versuche an Ni-Zn-Ferrit von WEIL<sup>4)</sup> vor. In diesen Arbeiten finden sich jedoch keinerlei Ansätze für eine theoretische Deutung des Effektes.

## 2. Experimentelle Untersuchungen und Ergebnisse

Für die vorliegenden Experimente wurden magnetostriktive Ferrite der angenäherten stöchiometrischen Zusammensetzung  $\text{Ni}_{0.8}\text{Zn}_{0.2}\text{Fe}_2\text{O}_4$  verwendet. Dieses Material läßt sich durch gemeinsames thermisches Zersetzen der zusammen gemahlenden Metalloxalate als feines Pulver erhalten, das mit einem organischen Binder versetzt und in einer Matrize zu Stäbchen verpreßt wird. Durch Sintern dieser Stäbchen bei Temperaturen zwischen 1100°C und 1280°C erhält man Porenvolumina von 26% bis 4%. Die fertigen Stäbchen haben eine Länge von etwa 8 cm und einen annähernd quadratischen Querschnitt von etwa 0,3 cm<sup>2</sup>. Für die Messung der Resonanzfrequenz werden die Stäbe in einer zylindrischen Spule, genau in der Mitte, wo bei Anregung in der Grundfrequenz ein Schwingungsknoten liegt, mit vier spitzen Schrauben festgeklemmt. An allen anderen Stellen schwingen sie frei. Dem erregenden Wechselstrom in der Spule wird zur Vormagnetisierung ein Gleichstrom überlagert. Da die Schwingungsgüte  $Q$  dieser Stäbe fast immer erheblich größer als 1000 ist, zeichnet sich die Resonanzfrequenz durch ein sehr scharfes Maximum der Impedanz aus und kann genau festgelegt werden. Schwingt ein Stab der Länge  $l$  in seiner tiefsten Eigenfrequenz, so berechnet sich die Schallgeschwindigkeit zu

$$V = 2l / \tau_{\text{res}}.$$

Die Eigenfrequenz der verwendeten Stäbe liegt zwischen 25 und 45 kc. Die durch die Vormagnetisierung bedingte Änderung des Elastizitätsmoduls ist größenordnungsmäßig kleiner als der Einfluß des Porenvolumens und muß daher nicht berücksichtigt werden. Die Bestimmung des Porenvolumens geschieht pyknometrisch.

In Figur 1 ist die Schallgeschwindigkeit von 30 Stäbchen von annähernd gleicher chemischer Zusammensetzung in Funktion des Porenvolumens dargestellt.

Mit einer gewissen durch Inhomogenitäten und kleine Fehler der Stäbchen bedingten Streuung scheint zwischen Porenvolumen und Schallgeschwindigkeit eine eindeutige Abhängigkeit zu bestehen. Aus der Schallgeschwindigkeit

<sup>1)</sup> A. SQUIRE, *Powder Metallurgy* (Mapleton House, New York, 1947).

<sup>2)</sup> H. J. BARTELS, Mitt. Kongr. Pulvermetallurgie Graz 1948.

<sup>3)</sup> A. RYSCHKEWITSCH, Ber. dtsch. keram. Ges. 25, 95 (1944).

<sup>4)</sup> L. WEIL, Ann. Inst. Fourier 2, 207 (1951).



schließt man für einen Ferrit mit einem Porenvolumen von 10% und einer Dichte von  $4,80 \text{ g/cm}^3$  auf einen Elastizitätsmodul  $E = 1,46 \cdot 10^{12} \text{ Dyn/cm}^2$ , der mit demjenigen von Stahl ( $E = 2,2 \cdot 10^{12} \text{ Dyn/cm}^2$ ) vergleichbar ist.

### 3. Theoretische Deutung

Der Spannungszustand eines porösen Körpers ist außerordentlich kompliziert. Es ist daher unmöglich, durch eine strenge Rechnung aus den Elastizitätskonstanten des Gerüstmaterials diejenigen des porösen Stoffes zu erhalten.

Deshalb soll eine Näherung versucht werden, welche in Folgendem besteht:

Man betrachte einen porösen Zylinder von  $1 \text{ cm}^2$  Querschnitt, der unter dem Zug  $Z$  steht (Figur 2). Die Poren sind durch Kugeln schematisiert. Legt man senkrecht zur Zugrichtung eine Schnittebene, so wird diese einige Poren schneiden und nahe bei anderen vorbeigehen. Die Summe der Projektionen der geschnittenen und der Ebene unmittelbar benachbarten Poren auf die Schnittebene werde als Porenfläche  $p_f$  bezeichnet. Der Zug  $Z$  verteilt sich somit auf

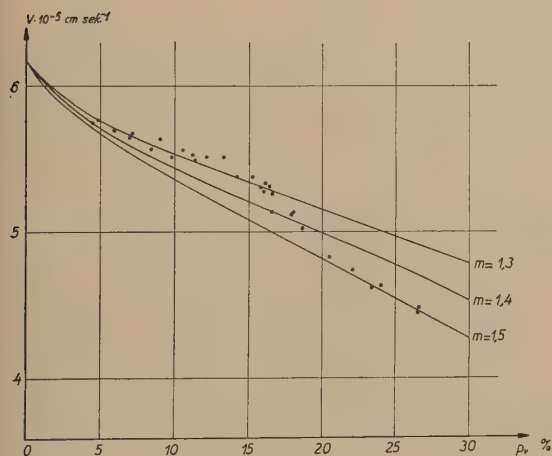


Fig. 1

Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Porenvolumen.

• Meßpunkte; — theoretische Kurven.

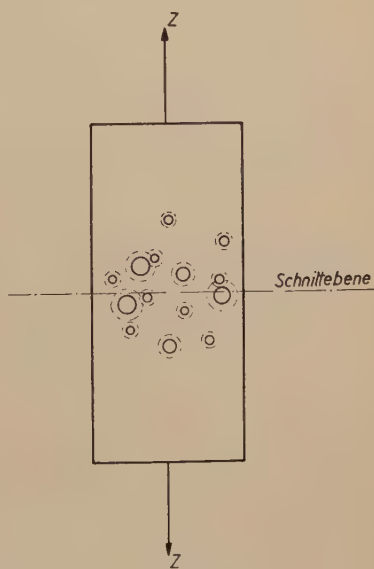


Fig. 2

die Fläche  $(1 - p_f)$  und bewirkt bei einem Elastizitätsmodul  $E_0$  des Gerüstmaterials eine relative Dehnung des Zylinders um

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{Z}{(1 - p_f) E_0}.$$

Der effektive Elastizitätsmodul  $E$  des porösen Körpers beträgt demnach

$$E = E_0(1 - p_f) .$$

Sind  $\varrho$  die mittlere Dichte des porösen Körpers,  $\varrho_0$  die Dichte der Gerüstsubstanz und  $p_v$  das relative Porenvolumen, also

$$\varrho = \varrho_0(1 - p_v) ,$$

so gilt für die Schallgeschwindigkeit in genügend schlanken Stäben

$$v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} = \sqrt{\frac{E_0}{\varrho_0} \cdot \frac{1 - p_f}{1 - p_v}} = v_0 \sqrt{\frac{1 - p_f}{1 - p_v}} ,$$

wo  $v_0$  die Schallgeschwindigkeit in der homogenen Gerüstsubstanz bedeutet.

Es besteht nun die Aufgabe, die Porenfläche  $p_f$  aus dem Porenvolumen  $p_v$  zu berechnen. Offenbar darf man  $p_f$  nicht einfach gleich dem Mittelwert der Schnittfläche der betrachteten Ebene mit den Poren setzen. Auf diese Weise würde man  $p_f = p_v$  und somit eine vom Porenvolumen unabhängige Schallgeschwindigkeit  $v = v_0$  erhalten, was durch das Experiment absolut nicht bestätigt ist. Diese Diskrepanz rührt natürlich davon her, daß dem komplizierten Spannungszustand, der sich in der Umgebung einer Pore ausbildet, auf keinerlei Weise Rechnung getragen wurde. Mit anderen Worten: Die Wirkung einer Pore erstreckt sich nicht nur auf ihr Volumen, sondern auch auf ihre nähere Umgebung.

Im folgenden wird versucht, diesem Umstand Rechnung zu tragen.

Dazu soll angenommen werden, daß die Poren einzelne, im allgemeinen gegeneinander abgeschlossene Hohlräume bilden, deren Gestalt nicht allzustark von der Kugelform abweiche. Ferner soll jede Pore von einer fiktiven Wirkungskugel umgeben gedacht sein (vergleiche Figur 2). Der Radius  $R_i$  dieser Wirkungskugel sei so gewählt, daß das Volumen der Wirkungskugel im selben Verhältnis zum Volumen der Pore steht wie das Gesamtvolumen des Körpers zum Gesamtporenvolumen. Liegt der Mittelpunkt einer Pore näher als  $R_i$  bei der Schnittebene, so ist die Projektion dieser Pore als Beitrag zur Porenfläche mitzuzählen. Alle Poren, die weiter weg von der Schnittebene liegen, werden vernachlässigt.

Die Poren seien entsprechend ihrem Volumen in verschiedene Sorten (Index  $i$ ) eingeteilt. Existieren von einer Sorte  $n_i$  Poren pro Kubikzentimeter und ist der Beitrag dieser Sorte zum Gesamtporenvolumen  $p_{iv}$ , so beträgt offenbar das Volumen einer Pore dieser Sorte  $p_{iv}/n_i$ . Die Projektion  $\sigma_i$  dieser kugelig angenommenen Pore auf die Schnittfläche wird somit

$$\sigma_i = \pi^{1/3} \left( \frac{3}{4} \right)^{2/3} \left( \frac{p_{iv}}{n_i} \right)^{2/3} . \quad (1)$$

Der Radius  $R_i$  der Wirkungskugel berechnet sich unter Berücksichtigung der oben formulierten Bedingungen

$$\sum_i \frac{4 \pi R_i^3}{3} n_i = 1 \quad \text{und} \quad \frac{4 \pi R_i^3}{3} = \frac{p_{iv}}{n_i} \cdot \frac{1}{p_v}$$

zu

$$R_i = \left( \frac{3}{4 \pi} \cdot \frac{p_{iv}}{n_i p_v} \right)^{1/3}.$$

Die gesuchte Porenfläche  $p_f$  wird somit

$$p_f = \sum_i 2 R_i n_i \sigma_i = \sum_i 2 \left( \frac{3 p_{iv}}{4 \pi n_i p_v} \right)^{1/3} n_i \pi^{1/3} \left( \frac{3}{4} \right)^{2/3} \left( \frac{p_{iv}}{n_i} \right)^{2/3}$$
$$p_f = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sum p_{iv}}{p_v^{1/3}} = \frac{3}{2} p_v^{2/3}.$$

Die Schallgeschwindigkeit wird damit

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 - (3/2) p_v^{2/3}}{1 - p_v}}.$$

Diese Ableitung kann leicht in zweierlei Beziehung verallgemeinert werden.

1. Für nicht kugelige Poren ist die mittlere Projektion  $\sigma_i$  der Poren der Sorte  $i$  nicht mehr nach Gleichung (1) zu berechnen, sondern sie wird um einen von der Porenform abhängigen Faktor  $\delta$  größer.

$$\bar{\sigma}_i = \delta \pi^{1/3} \left( \frac{3}{4} \right)^{2/3} \left( \frac{p_{iv}}{n_i} \right)^{2/3}.$$

Für ein Parallelepiped der Kantenlängen  $a, b, c$  berechnet sich  $\delta$  beispielsweise zu

$$\delta = \frac{1}{\pi^{1/3}} \left( \frac{4}{3} \right)^{2/3} \frac{(a b + b c + a c)}{2 (a b c)^{2/3}}.$$

Man erhält somit

|                                   |                  |
|-----------------------------------|------------------|
| für die Kugel . . . . .           | $\delta = 1,00;$ |
| für einen Würfel . . . . .        | $\delta = 1,24;$ |
| für $a = b = 1, c = 5$ . . . . .  | $\delta = 1,56;$ |
| für $a = b = 1, c = 20$ . . . . . | $\delta = 2,30.$ |

2. Durch die Zugrichtung ist im Material eine Richtung ausgezeichnet. Der einzuführende Wirkungsbereich einer Pore ist daher nicht notwendig kugelsymmetrisch, sondern möglicherweise in Zugrichtung gedehnt oder zusammengedrückt. Um dieser Möglichkeit Rechnung zu tragen, können Rotationsellipsoide als Wirkungsbereiche eingeführt werden. Dabei soll immer angenommen

werden, daß die Lineardimension jeder Pore klein gegen die Lineardimension des zugehörigen Wirkungsbereiches sei und daß deshalb die Form der Pore die Form des Wirkungsbereiches nicht beeinflusse. Unter den gleichen Nebenbedingungen wie vorher erhält man für die in Zugrichtung liegende Halbachse  $b_i$

$$b_i = \left( \gamma^2 \frac{3 \dot{p}_{iv}}{4 n_i \dot{p}_v} \right)^{1/3},$$

wo  $\gamma$  gleich dem Verhältnis der Halbachse in Zugrichtung zu den zwei gleichen Halbachsen senkrecht zur Zugrichtung bedeutet. Für  $\gamma > 1$  ist also das Ellipsoid gestreckt, für  $\gamma < 1$  dagegen abgeplattet.

Führt man die Berechnung der Schallgeschwindigkeit wie vorher, jedoch unter Benützung von  $\dot{\sigma}_i$  und  $b_i$  statt  $\sigma_i$  und  $R_i$  durch, so ergibt sich

$$V = V_0 \sqrt{\frac{1 - (3/2) \delta \gamma^{2/3} \dot{p}_v^{2/3}}{1 - \dot{p}_v}}$$

oder mit  $m = \frac{3}{2} \delta \gamma^{2/3}$

$$V = V_0 \sqrt{\frac{1 - m \dot{p}_v^{2/3}}{1 - \dot{p}_v}}.$$

#### 4. Vergleich der Experimente mit der theoretischen Formel

In Figur 1 sind unter Annahme von  $V_0 = 6,18 \cdot 10^5$  cm/s die theoretischen Kurven für  $m = 1,5$ ,  $m = 1,4$  und  $m = 1,3$  mit den Meßpunkten von 30 Stäben zusammen eingetragen.

Man sieht, daß diese einfache Theorie die Größe des beobachteten Effektes durchaus richtig trifft. Für kleine Porenvolumen liegen jedoch die Werte näher an der Kurve für  $m = 1,3$ , während für große Porenvolumen die Übereinstimmung mit der Kurve für  $m = 1,5$  besser ist. Dies kann dadurch erklärt werden, daß bei kleinen Porenvolumen die Sintertemperatur höher war und somit die Poren im allgemeinen kugelig wurden. Dadurch wird  $\delta$  und somit auch  $m$  kleiner als bei den großen Porenvolumen, wo infolge der niedrigen Sintertemperatur die Poren stärker von der Kugelgestalt abweichen.

Es ist bemerkenswert, daß die Werte von  $\delta$  und  $\gamma$  beide nahe bei eins liegen und somit eher als Korrekturen wirken.

Setzt man nämlich unter Annahme von Kugelporen bei kleinen Porenvolumen  $\delta = 1$ , so erhält man sofort aus  $m = 1,3$  für das Achsenverhältnis der etwas abgeplatteten Wirkungsellipsoide  $\gamma = 0,81$ . Mit diesem Wert für  $\gamma$  erhält man bei großen Porenvolumen  $\delta = 1,15$ , was Poren entsprechen dürfte, deren Gestalt wenig von der Kugelform abweicht.

Der Wert für den Elastizitätsmodul  $E_0$  des porenfreien Ferrits ergibt sich aus unserer theoretischen Extrapolation mit  $V_0 = 6,18 \cdot 10^5$  cm/s bei An-



nahme der aus den Röntgendaten berechneten Dichte  $\rho_0 = 5,33 \text{ g/cm}^3$  zu  $E_0 = 2,04 \cdot 10^{12} \text{ Dyn/cm}^2$ , was mit dem Wert  $2,0 \cdot 10^{12} \text{ Dyn/cm}^2$  von WEIL in ausgezeichneter Übereinstimmung steht.

## 5. Diskussion

Aus diesen Ausführungen geht hervor, daß sich unter den gemachten, sehr rohen Annahmen (Querschnittsverringering durch Porenfläche und Einführung von Wirkungsbereichen der einzelnen Poren) die experimentell gefundene Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit vom Porenvolumen recht gut theoretisch wiedergeben läßt. Es ist aber nach den bisherigen Überlegungen auch zu erwarten, daß die Schallgeschwindigkeit nicht nur vom Porenvolumen, sondern auch, allerdings in geringerem Ausmaß, von der Porenform und wahrscheinlich von der Größenverteilung der Poren abhängt.

Daher wäre es interessant, Versuchsreihen mit möglichst konstanter Porenform und variablem Porenvolumen in der Weise durchzuführen, daß alle Stäbe bei der gleichen Temperatur gesintert, aber mit verschiedenem Preßdruck geformt werden.

Weitere Daten über das elastische Verhalten könnten aus der Messung von Biegeschwingungen an diesen Stäben gewonnen werden.

Durch oszillographische Messung der Abklingdauer frei schwingender Feritstäbe haben wir die innere Dämpfung ermittelt. Unsere Versuche lassen noch keine einheitliche Interpretation zu. Die Verhältnisse werden durch das Auftreten von magnetomechanischer Hysterese kompliziert.

## Summary

Measurements made show the very close relation between sound velocity and pore volume in a Ni-Zn ferrite of fixed composition. Schematizing the complicated state of stress and strain in a porous medium in a rough manner, a theoretical expression for the sound velocity is derived that fits the experimental curve astonishingly well.

(Eingegangen: 25. 10. 1951.)

# Bending of a Thin Elliptic Plate of an Orthotropic Material under Uniform Lateral Load

By YOSIO OHASI, Tokyo, Japan<sup>1)</sup>

In this paper, the bending problem of a thin elliptic plate of an aeolotropic material subjected to a uniform load has been treated. The material of which is assumed to have two orthogonal axes of symmetry with respect to its elastic properties. Recently the solution for a circular plate was obtained by OKUBO<sup>2)</sup>. In the case treated by him, however, the direction of the symmetrical axes of the material are out of the question. While in cases of an elliptic plate, the directions of the symmetrical axes come into question, because of the unsymmetrical shape of the plate with respect to its center.

We shall assume the plate to be of uniform thickness  $h$ , and shall take  $x$ -,  $y$ -axes in the plane of the plate before bending, the directions of which are chosen in the directions of the symmetrical axes of the material. Then the deflection of the plate satisfies the differential equation<sup>3)</sup>

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_2 + D_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \quad (1)$$

where  $q$  is the intensity of a uniformly distributed load,  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$ , and  $S_{66}$  are elastic constants defined by

$$e_{xx} = S_{11} \sigma_x + S_{12} \sigma_y, \quad e_{yy} = S_{12} \sigma_x + S_{22} \sigma_y, \quad e_{xy} = S_{66} \tau_{xy},$$

and

$$D_1 = \frac{h^3 S_{22}}{12 (S_{11} S_{22} - S_{12}^2)}, \quad D_3 = \frac{h^3 S_{11}}{12 (S_{11} S_{22} - S_{12}^2)},$$

$$D_2 = - \frac{h^3 S_{12}}{12 (S_{11} S_{22} - S_{12}^2)}, \quad D_4 = \frac{h^3}{6 S_{66}}.$$

If  $x'$ ,  $y'$ , and  $\theta$  represent the axes of the ellipse and the angle between  $x$  and  $x'$ , respectively, then

$$x' + i y' = e^{i\theta} (x + i y). \quad (2)$$

<sup>1)</sup> The Railway Technical Laboratory.

<sup>2)</sup> H. OKUBO, J. appl. Phys. 20, 1151 (1949).

<sup>3)</sup> S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells* (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1940), p. 189.

Transform the Cartesian coordinates  $x', y'$  into the curvilinear coordinates by

$$x' + i y' = c \cosh(\alpha + i \beta), \quad (3)$$

then  $\alpha = \text{const}$  represents a family of confocal ellipses and  $\beta = \text{const}$  represents a family of hyperbolas orthogonal to the former. Assuming that  $\alpha = \alpha_0$  represents the periphery of the plate, we have

$$a = c \cosh \alpha_0, \quad b = c \sinh \alpha_0, \quad (4)$$

where  $a$  and  $b$  represent the half lengths of the major and minor axes of the elliptic plate, respectively.

The general solution of the differential equation (1) can be written in the form<sup>1)</sup>

$$w = w_0 + R[f_1(x + i k_1 y) + f_2(x + i k_2 y)], \quad (5)$$

where  $w_0$  is a particular solution of (1),  $f_1, f_2$  are arbitrary functions,  $R$  denote the real part of a complex function and

$$k_1 = \frac{D_1^{1/2}}{\sqrt{D_2 + D_4 + \{(D_2 + D_4)^2 - D_1 D_3\}^{1/2}}},$$

$$k_2 = \frac{D_1^{1/2}}{\sqrt{D_2 + D_4 - \{(D_2 + D_4)^2 - D_1 D_3\}^{1/2}}}.$$

### 1. Built-in Edge

First, we shall consider an elliptic plate clamped at its periphery. We shall take for deflection the expression

$$w = A \left( \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (6)$$

We see that  $w$  satisfies the boundary conditions  $w = \partial w / \partial \alpha = 0$ , and also the differential equation (1) provided

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{q}{L_1 \cos^4 \vartheta + 2 L_2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + L_3 \sin^4 \vartheta}, \\ L_1 &= \frac{24 D_1}{a^4} + \frac{16 (D_2 + D_4)}{a^2 b^2} + \frac{24 D_3}{b^4}, \\ L_2 &= \frac{24 D_1}{a^2 b^2} + 8 (D_2 + D_4) \left( \frac{3}{a^4} - \frac{4}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4} \right) + \frac{24 D_3}{a^2 b^2}, \\ L_3 &= \frac{24 D_1}{b^4} + \frac{16 (D_2 + D_4)}{a^2 b^2} + \frac{24 D_3}{a^4}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

<sup>1)</sup> H. Ōкуво, J. appl. Phys. 20, 1151 (1949).

If  $\varphi$  be the angle which the normal to the curve  $\alpha = \text{const}$  makes with the axes of  $x'$ , the normal makes an angle  $\varphi - \vartheta$  with the axis of  $x$ , and so the bending moments can be written in the forms

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha} &= -\frac{1}{2} \{D_1 + D_2 + (D_1 - D_2) \cos 2(\varphi - \vartheta)\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{D_2 + D_3 + (D_2 - D_3) \cos 2(\varphi - \vartheta)\} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &\quad - D_4 \sin 2(\varphi - \vartheta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ M_{\beta} &= -\frac{1}{2} \{D_1 + D_2 - (D_1 - D_2) \cos 2(\varphi - \vartheta)\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{D_2 + D_3 - (D_2 - D_3) \cos 2(\varphi - \vartheta)\} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &\quad + D_4 \sin 2(\varphi - \vartheta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ M_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \left\{ (D_1 - D_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_2 - D_3) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \sin 2(\varphi - \vartheta) \\ &\quad + D_4 \cos 2(\varphi - \vartheta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 2A \left\{ \left( \frac{2x' \cos \vartheta}{a^2} + \frac{2y' \sin \vartheta}{b^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2} \right) \left( \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 \right) \right\}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 2A \left\{ \left( \frac{2x' \sin \vartheta}{a^2} - \frac{2y' \cos \vartheta}{b^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sin^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\cos^2 \vartheta}{b^2} \right) \left( \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 \right) \right\}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 2A \left\{ \left( \frac{2y' \cos \vartheta}{b^2} - \frac{2x' \sin \vartheta}{a^2} \right) \left( \frac{2x' \cos \vartheta}{a^2} + \frac{2y' \sin \vartheta}{b^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 \right) \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin 2\vartheta \right\}. \end{aligned}$$

As an example, we consider an oak plate cut parallel to the grain of wood. The axis of  $y$  is taken in the direction of the fibres, then it becomes<sup>1)</sup> ( $h$  being assumed to be unity),

$$D_1 = 10.19, \quad D_2 = 6.687, \quad D_3 = 22.62, \quad D_4 = 6.667,$$

from which

$$k_1^2 = 0.3428 - 0.2279 i, \quad k_2^2 = 0.3428 + 0.2279 i.$$

<sup>1)</sup> H. HÖRIG, Ing.-Arch. 6, 8 (1935).



The maximum deflection is at the center of the plate, and from equation (6), we obtain

$$w_{max} = \frac{q}{L_1 \cos^4 \vartheta + 2 L_2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + L_3 \sin^4 \vartheta}. \quad (9)$$

Taking the ratio of the major and minor axes as 3:1, the amounts of the maximum deflection for three different cases of  $\vartheta = 0, \pi/4, \pi/2$  are calculated from (9). They are

$$w_{max} = 0.1755, \quad 0.2542 \quad \text{and} \quad 0.3636 \quad (\text{unit } 10^{-2} q b^4).$$

When a plate is clamped at the periphery, the maximum moment will be there, and so it becomes essential to find the values of the moments at the boundary, from equation (8) it becomes

$$\left. \begin{aligned} M_\alpha &= -4 A \left[ \{D_1 + D_2 + (D_1 - D_2) \cos 2(\varphi - \vartheta)\} \right. \\ &\quad \times \left( \frac{\cos \vartheta \cos \beta}{a} + \frac{\sin \vartheta \sin \beta}{b} \right)^2 \\ &\quad + \{D_2 + D_3 + (D_2 - D_3) \cos 2(\varphi - \vartheta)\} \\ &\quad \times \left( \frac{\sin \vartheta \cos \beta}{a} - \frac{\cos \vartheta \sin \beta}{b} \right)^2 - 2 D_4 \sin 2(\varphi - \vartheta) \\ &\quad \times \left. \left( \frac{\cos \vartheta \cos \beta}{a} + \frac{\sin \vartheta \sin \beta}{b} \right) \left( \frac{\sin \vartheta \cos \beta}{a} - \frac{\cos \vartheta \sin \beta}{b} \right) \right], \\ M_\beta &= -4 A \left[ \{D_1 + D_2 - (D_1 - D_2) \cos 2(\varphi - \vartheta)\} \right. \\ &\quad \times \left( \frac{\cos \vartheta \cos \beta}{a} + \frac{\sin \vartheta \sin \beta}{b} \right)^2 \\ &\quad + \{D_2 + D_3 - (D_2 - D_3) \cos 2(\varphi - \vartheta)\} \\ &\quad \times \left( \frac{\sin \vartheta \cos \beta}{a} - \frac{\cos \vartheta \sin \beta}{b} \right)^2 + 2 D_4 \sin 2(\varphi - \vartheta) \\ &\quad \times \left. \left( \frac{\cos \vartheta \cos \beta}{a} + \frac{\sin \vartheta \sin \beta}{b} \right) \left( \frac{\sin \vartheta \cos \beta}{a} - \frac{\cos \vartheta \sin \beta}{b} \right) \right], \\ M_{\alpha\beta} &= -4 A \left[ \left\{ (D_1 - D_2) \left( \frac{\cos \vartheta \cos \beta}{a} + \frac{\sin \vartheta \sin \beta}{b} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad + (D_2 - D_3) \left( \frac{\sin \vartheta \cos \beta}{a} - \frac{\cos \vartheta \sin \beta}{b} \right)^2 \Big\} \sin 2(\varphi - \vartheta) \\ &\quad + 2 D_4 \cos 2(\varphi - \vartheta) \left( \frac{\cos \vartheta \cos \beta}{a} + \frac{\sin \vartheta \sin \beta}{b} \right) \\ &\quad \times \left. \left( \frac{\sin \vartheta \cos \beta}{a} - \frac{\cos \vartheta \sin \beta}{b} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

where

$$\sin 2\varphi = \frac{2ab \sin 2\beta}{a^2 - b^2 - (a^2 + b^2) \cos 2\beta}, \quad \cos 2\varphi = \frac{(a^2 - b^2) \cos 2\beta - a^2 + b^2}{a^2 - b^2 - (a^2 + b^2) \cos 2\beta}.$$

The bending moments at the periphery are calculated from equation (10) and are shown in figures 1, 2, and 3. For the convenience of comparison, the corresponding values for the isotropy are also shown by dotted lines in the same figures (Poisson's ratio is assumed to be 0.3).

In the foregoing calculations, we treated only the case of a uniform load, but when the distribution of load is expressed by a polynomial of  $x'$ ,  $y'$ , a similar procedure can be used by assuming  $A$  in (6) as a polynomial of  $x'$ ,  $y'$ .

## 2. Supported Edge

The analysis for this case is more complicated. We transform the Cartesian coordinates into the following systems of curvilinear coordinates

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= c e^{-i\vartheta} \cosh(\alpha + i\beta), \\ x + i k_1 y &= c' e^{-i\vartheta'} \cosh(\alpha' + i\beta' + i\beta_1), \\ x + i k_2 y &= c'' e^{-i\vartheta''} \cosh(\alpha'' + i\beta'' + i\beta_2), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

where  $c'$ ,  $c''$ ,  $\vartheta'$ ,  $\vartheta''$ ,  $\beta_1$ , and  $\beta_2$  are arbitrary constants. In the transformation (11), from the conditions that the curve  $\alpha' = \alpha'_0$ , represents the periphery of the plate and that  $\beta = \beta'$  at the boundary, we have

$$\left. \begin{aligned} c \cosh \alpha_0 \cos \vartheta &= c' \cosh \alpha'_0 \cos \vartheta' \cos \beta_1 + c' \sinh \alpha'_0 \sin \vartheta' \sin \beta_1, \\ c \sinh \alpha_0 \sin \vartheta &= -c' \cosh \alpha'_0 \cos \vartheta' \sin \beta_1 + c' \sinh \alpha'_0 \sin \vartheta' \cos \beta_1, \\ k_1 c \sinh \alpha_0 \cos \vartheta &= c' \sinh \alpha'_0 \cos \vartheta' \sin \beta_1 - c' \cosh \alpha'_0 \sin \vartheta' \cos \beta_1, \\ -k_1 c \cosh \alpha_0 \sin \vartheta &= c' \sinh \alpha'_0 \cos \vartheta' \cos \beta_1 + c' \cosh \alpha'_0 \sin \vartheta' \sin \beta_1, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

from which

$$\left. \begin{aligned} (k^2 - 1) \sinh 2\alpha_0 \sin 2\vartheta \tan^2 \beta_1 \\ + 4 \{ k_1^2 (\cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta - \sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta) + \cosh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta \\ - \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta \} \tan \beta_1 - (k_1^2 - 1) \sinh 2\alpha_0 \sin 2\vartheta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Solving the equation (13), we have two solutions for  $\tan \beta_1$ , but the difference of the corresponding values of  $\beta_1$  is  $\pi/2$ , and so it is sufficient for further calculations if we take only one value of the two.

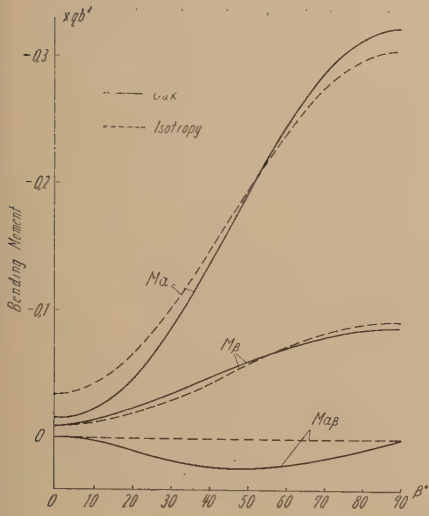


Fig. 1

Bending moments acting on the periphery of the plate with a clamped edge, when  $a = 3b$  and  $\theta = 0$ .

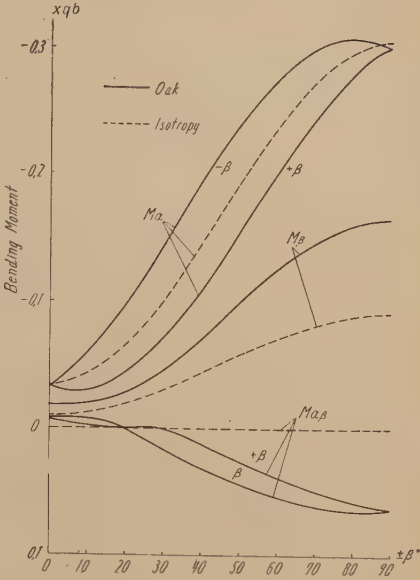


Fig. 2

Bending moments acting on the periphery of the plate with a clamped edge, when  $a = 3b$  and  $\theta = \pi/4$ .

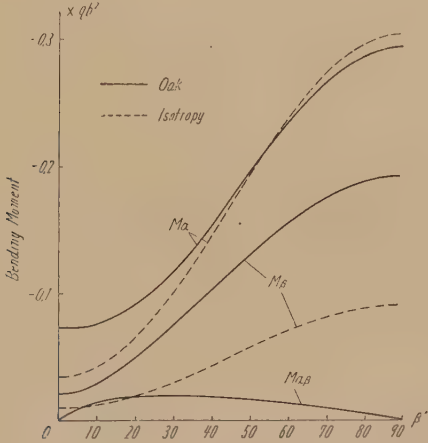


Fig. 3

Bending moments acting on the periphery of the plate with a clamped edge, when  $a = 3b$  and  $\theta = \pi/2$ .

Substituting the one value of  $\beta_1$  into (12), we can find  $\alpha'_0$ ,  $\vartheta'$ , and  $c'$ .

In the same manner, we can determine  $\beta_2$ ,  $\alpha''_0$ ,  $\vartheta''$ , and  $c''$  so as to satisfy the cognate conditions. If we determine the constants in this way,  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\alpha' = \alpha'_0$ , and  $\alpha'' = \alpha''_0$  represent respectively the periphery of the plate and moreover

$$\beta = \beta' = \beta'', \quad (14)$$

at the boundary.

Taking the deflection of the plate in the expression

$$\left. \begin{aligned} w = & R [f_1(x + i k_1 y) + f_2(x + i k_2 y)] \\ & + C_1 x'^4 + C_2 x'^3 y' + C_3 x'^2 y'^2 + C_4 x' y'^3 \\ & + C_5 y'^4 + C_6 x'^2 + C_7 x' y' + C_8 y'^2 + C_9, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

and

$$\left. \begin{aligned} f_1''(x + i k_1 y) &= \sum_{n=2}^{\infty} (A_n + i A'_n) \cosh 2n(\alpha' + i\beta'), \\ f_2''(x + i k_2 y) &= \sum_{n=2}^{\infty} (B_n + i B'_n) \cosh 2n(\alpha'' + i\beta''), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

we have

$$\left. \begin{aligned} w = & \frac{c'^2}{4} \sum_{n=2}^{\infty} A_n \left[ \frac{\cosh(2n+2)\alpha'}{(2n+2)(2n+1)} \cos(2n+2)\beta' \right. \\ & - \left\{ \frac{1}{(2n+1)2n} + \frac{1}{2n(2n-1)} \right\} \cosh 2n\alpha' \cos 2n\beta' \\ & + \frac{\cosh(2n-2)\alpha'}{(2n-1)(2n-2)} \cos(2n-2)\beta' \Big] \\ & + \frac{c'^2}{4} \sum_{n=2}^{\infty} A'_n \left[ \frac{\sinh(2n+2)\alpha'}{(2n+2)(2n+1)} \sin(2n+2)\beta' \right. \\ & - \left\{ \frac{1}{(2n+1)2n} + \frac{1}{2n(2n-1)} \right\} \sinh 2n\alpha' \sin 2n\beta' \\ & + \frac{\sinh(2n-2)\alpha'}{(2n-1)(2n-2)} \sin(2n-2)\beta' \Big] \\ & + \frac{c''^2}{4} \sum_{n=2}^{\infty} B_n \left[ \frac{\cosh(2n+2)\alpha''}{(2n+2)(2n+1)} \cos(2n+2)\beta'' \right. \\ & - \left\{ \frac{1}{(2n+1)2n} + \frac{1}{2n(2n-1)} \right\} \cosh 2n\alpha'' \cos 2n\beta'' \\ & + \frac{\cosh(2n-2)\alpha''}{(2n-1)(2n-2)} \cos(2n-2)\beta'' \Big] - \end{aligned} \right\} \quad (17)$$



$$\left. \begin{aligned}
& - \frac{c''^2}{4} \sum_{n=2}^{\infty} B'_n \left[ \frac{\sinh(2n+2)\alpha''}{(2n+2)(2n+1)} \sin(2n+2)\beta'' \right. \\
& \quad \left. - \left\{ \frac{1}{(2n+1)2n} + \frac{1}{2n(2n-1)} \right\} \sinh 2n\alpha'' \sin 2n\beta'' \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sinh(2n-2)\alpha''}{(2n-1)(2n-2)} \sin(2n-2)\beta'' \right] \\
& \quad + C_1 x'^4 + C_2 x'^3 y' + C_3 x'^2 y'^2 + C_4 x' y'^3 + C_5 y'^4 \\
& \quad + C_6 x'^2 + \hat{C}_7 x' y' + C_8 y'^2 + C_9.
\end{aligned} \right\} \quad (17)$$

To satisfy the differential equation (1), we have

$$\left. \begin{aligned}
& \{3C_1 D_1 + 3C_5 D_3 + C_3(D_2 + D_4)\} \cos^4 \vartheta \\
& + 3\{C_2(D_1 - D_2 - D_4) - C_4 D_3\} \cos^3 \vartheta \sin \vartheta \\
& + \{3C_1(D_1 + D_2 + D_3 + D_4) + (D_2 + D_4)(6C_1 - 7C_3 + 6C_5)\} \\
& \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + 3\{C_2(D_2 - D_3 + D_4) + C_4 D_1\} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \\
& + \{3C_5 D_1 + 3C_1 D_3 + C_3(D_2 + D_4)\} \sin^4 \vartheta = \frac{q}{8}.
\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

From the condition that  $w$  vanishes at the boundary, we find

$$\left. \begin{aligned}
& 3C_1 c^4 \cosh^4 \alpha_0 + C_3 c^4 \sinh^2 \alpha_0 \cosh^2 \alpha_0 + 3C_5 c^4 \sinh^4 \alpha_0 \\
& \quad + 4C_6 c^2 \cosh^2 \alpha_0 + 4C_8 c^2 \sinh^2 \alpha_0 + 8C_9 = 0, \\
& C_1 c^4 \cosh^4 \alpha_0 - C_5 c^4 \sinh^4 \alpha_0 + C_6 c^2 \cosh^2 \alpha_0 - C_8 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \\
& \quad + \frac{A_2}{12} c'^2 \cosh 2\alpha'_0 + \frac{B_2}{12} c''^2 \cosh 2\alpha''_0 = 0, \\
& C_2 c^4 \sinh \alpha_0 \cosh^3 \alpha_0 + C_4 c^4 \sinh^3 \alpha_0 \cosh \alpha_0 + 2C_7 c^2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \\
& \quad - \frac{A_2}{6} c'^2 \sinh 2\alpha'_0 - \frac{B_2}{6} c''^2 \sinh 2\alpha''_0 = 0, \\
& C_1 c^4 \cosh^4 \alpha_0 - C_3 c^4 \sinh^2 \alpha_0 \cosh^2 \alpha_0 + C_5 c^4 \sinh^4 \alpha_0 \\
& \quad + \left( \frac{A_3}{10} - \frac{4A_2}{15} \right) c'^2 \cosh 4\alpha'_0 + \left( \frac{B_3}{10} - \frac{4B_2}{15} \right) c''^2 \cosh 4\alpha''_0 = 0, \\
& C_2 c^4 \sinh \alpha_0 \cosh^3 \alpha_0 - C_4 c^4 \sinh^3 \alpha_0 \cosh \alpha_0 \\
& \quad - \left( \frac{A_3}{10} - \frac{4A_2}{15} \right) c'^2 \sinh 4\alpha'_0 - \left( \frac{B_3}{10} - \frac{4B_2}{15} \right) c''^2 \sinh 4\alpha''_0 = 0,
\end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{A_2}{120} - \frac{A_3}{70} + \frac{A_4}{168} \right) c'^2 \cosh 6 \alpha'_0 \\
 & \quad + \left( \frac{B_2}{120} - \frac{B_3}{70} + \frac{B_4}{168} \right) c''^2 \cosh 6 \alpha''_0 = 0, \\
 & \left( \frac{A'_2}{120} - \frac{A'_3}{70} + \frac{A'_4}{168} \right) c'^2 \sinh 6 \alpha'_0 \\
 & \quad + \left( \frac{B'_2}{120} - \frac{B'_3}{70} + \frac{B'_4}{168} \right) c''^2 \sinh 6 \alpha''_0 = 0, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \left\{ \frac{A_{n-1}}{2n-1} - \left( \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) A_n + \frac{A_{n+1}}{2n+1} \right\} \frac{c'^2 \cosh 2n \alpha'_0}{8n} \\
 & \quad + \left\{ \frac{B_{n-1}}{2n-1} - \left( \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) B_n + \frac{B_{n+1}}{2n+1} \right\} \frac{c''^2 \cosh 2n \alpha''_0}{8n} = 0, \\
 & \left\{ \frac{A'_{n-1}}{2n-1} - \left( \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) A'_n + \frac{A'_{n+1}}{2n+1} \right\} \frac{c'^2 \sinh 2n \alpha'_0}{8n} \\
 & \quad + \left\{ \frac{B'_{n-1}}{2n-1} - \left( \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) B'_n + \frac{B'_{n+1}}{2n+1} \right\} \frac{c''^2 \sinh 2n \alpha''_0}{8n} = 0,
 \end{aligned} \tag{19}$$

and from the condition that  $M_\alpha$  vanishes at the boundary, we have the relation

$$\left. \begin{aligned}
 & \{ (D_1 + D_2) + (D_1 - D_2) \cos 2(\varphi - \vartheta) \} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 & + \{ (D_2 + D_3) + (D_2 - D_3) \cos 2(\varphi - \vartheta) \} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 & + 2 D_4 \sin 2(\varphi - \vartheta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,
 \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

where

$$\cos 2(\varphi - \vartheta) = \frac{\cosh 2\alpha_0 \cos 2\vartheta \cos 2\beta + \sinh 2\alpha_0 \sin 2\vartheta \sin 2\beta - \cos 2\vartheta}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta},$$

$$\sin 2(\varphi - \vartheta) = \frac{\sinh 2\alpha_0 \cos 2\vartheta \sin 2\beta - \cosh 2\alpha_0 \sin 2\vartheta \cos 2\beta + \sin 2\vartheta}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta},$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cosh 2n \alpha'_0 + B_n \cosh 2n \alpha''_0) \cos 2n \beta \\
 & \quad + \sum_{n=2}^{\infty} (A'_n \sinh 2n \alpha'_0 + B'_n \sinh 2n \alpha''_0) \sin 2n \beta + 6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta \\
 & \quad + 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + C_3 c^2 (\sinh^2 \alpha_0 + \sin^2 \vartheta) \\
 & \quad + 3 C_4 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + 6 C_5 \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta + 2 C_6 \cos^2 \vartheta +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 C_7 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 C_8 \sin^2 \vartheta + \{ 6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta \\
& + 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + C_3 c^2 (\cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta - \sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta) \\
& - 3 C_4 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta - 6 C_5 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta \} \cos 2 \beta \\
& + (3 C_2 \cos^2 \vartheta + 4 C_3 \sin \vartheta \cos \vartheta + 3 C_4 \sin^2 \vartheta) c^2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \sin 2 \beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = & - \sum_{n=2}^{\infty} (A_n k_1^2 \cosh 2 n \alpha'_0 + B_n k_2^2 \cosh 2 n \alpha''_0) \cos 2 n \beta \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} (A'_n k_1^2 \sinh 2 n \alpha'_0 + B'_n k_2^2 \sinh 2 n \alpha''_0) \sin 2 n \beta \\
& + 6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta - 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta \\
& + C_3 c^2 (\sinh^2 \alpha_0 + \cos^2 \vartheta) - 3 C_4 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta \\
& + 6 C_5 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta + 2 C_6 \sin^2 \vartheta - 2 C_7 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 C_8 \cos^2 \vartheta \\
& + \{ 6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta - 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta \\
& + C_3 c^2 (\cosh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta - \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta) \\
& + 3 C_4 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin \vartheta \cos \vartheta - 6 C_5 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta \} \cos 2 \beta \\
& + (3 C_2 \sin^2 \vartheta - 4 C_3 \sin \vartheta \cos \vartheta + 3 C_4 \cos^2 \vartheta) c^2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \sin 2 \beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = & - \sum_{n=2}^{\infty} (A_n k_1 \sinh 2 n \alpha'_0 + B_n k_2 \sinh 2 n \alpha''_0) \sin 2 n \beta \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} (A'_n k_1 \cosh 2 n \alpha'_0 + B'_n k_2 \cosh 2 n \alpha''_0) \cos 2 n \beta \\
& + \frac{1}{2} [- 6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + C_3 c^2 \sin 2 \vartheta \\
& + 6 C_5 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta - 2 C_6 \sin 2 \vartheta + 2 C_7 \cos 2 \vartheta \\
& + 2 C_8 \sin 2 \vartheta + 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta + 3 C_4 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \\
& + \{ - 6 C_1 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 3 C_2 c^2 \cosh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \\
& + C_3 c^2 \cosh 2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta - 3 C_4 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \cos 2 \vartheta \\
& - 6 C_5 c^2 \sinh^2 \alpha_0 \sin 2 \vartheta \} \cos 2 \beta \\
& + \{ - 3 C_2 c^2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \sin 2 \vartheta + 4 C_3 c^2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \cos 2 \vartheta \\
& + 3 C_4 c^2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \sin 2 \vartheta \} \sin 2 \beta].
\end{aligned}$$

Mathematical difficulties are encountered for the determination of the constants  $C_1, C_2, \dots, C_9, A_2, B_2, A'_2, B'_2, \dots$  to satisfy the equations (18), (19), and (20), under the condition that the functions  $f_1$  and  $f_2$  converge, so we shall find an approximate solution by a method as shown in the following example.

We consider the same plate as in the foregoing example, and treat first the case of  $\vartheta = \pi/4$ , since the procedure is quite similar in other cases. As the first approximation, assuming

$$A_2 = B_2 = A'_2 = B'_2 = A_3 = B_3 = A'_3 = B'_3 = \dots = 0,$$

we find from equations (18), (19), and (20)

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.0000824 q, & C_4 &= 0.000218 q, & C_7 &= -0.000218 q b^2, \\ C_2 &= 0.0000242 q, & C_5 &= 0.002361 q, & C_8 &= -0.013551 q b^2, \\ C_3 &= 0.001013 q, & C_6 &= -0.001985 q b^2, & C_9 &= 0.012291 q b^4. \end{aligned}$$

At the boundary,  $w$  vanishes but  $M_x$  does not vanish, and the boundary condition is not fully satisfied. The residual bending moment at the boundary is

$$M_\alpha = - \frac{0.0074 \cos 4 \beta + 0.0046 \sin 4 \beta}{1.250 - \cos 2 \beta} q b^2.$$

As the second approximation, assuming

$$A_3 = B_3 = A'_3 = B'_3 = A_4 = B_4 = A'_4 = B'_4 = \dots = 0,$$

we have

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.0000935 q, & C_4 &= 0.000219 q, & C_7 &= -0.000224 q b^2, \\ C_2 &= 0.0000249 q, & C_5 &= 0.002332 q, & C_8 &= -0.013406 q b^2, \\ C_3 &= 0.001060 q, & C_6 &= -0.002088 q b^2, & C_9 &= 0.011194 q b^4, \\ A_2 &= (0.0004465 + 0.0003158 i) q b^2, & B_2 &= (0.0004465 + 0.0003158 i) q b^2, \\ A'_2 &= (-0.0000297 + 0.0000198 i) q b^2, & B'_2 &= (-0.0000297 - 0.0000198 i) q b^2, \end{aligned}$$

and the residual moment is

$$M_\alpha = - \frac{0.0052 \cos 6 \beta - 0.0040 \sin 6 \beta}{1.250 - \cos 2 \beta} q b^2.$$

In the same manner, we have the residual bending moments for the second approximation, in the cases of  $\vartheta = 0$  and  $\pi/2$ ,

$$M_\alpha = - \frac{0.0037 \cos 6 \beta}{1.250 - \cos 2 \beta} q b^2, \quad \text{and} \quad M_\alpha = - \frac{0.0078 \cos 6 \beta}{1.250 - \cos 2 \beta} q b^2,$$



respectively. The bending moments at the center of the plate, where

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0, \quad \beta = \beta' = \beta'' = \varphi = \frac{\pi}{2},$$

are

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha} &= -\frac{1}{2} \{D_1 + D_2 - (D_1 - D_2) \cos 2\vartheta\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{D_2 + D_3 - (D_2 - D_3) \cos 2\vartheta\} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_4 \sin 2\vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ M_{\beta} &= -\frac{1}{2} \{D_1 + D_2 + (D_1 - D_2) \cos 2\vartheta\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{D_2 + D_3 + (D_2 - D_3) \cos 2\vartheta\} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_4 \sin 2\vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ M_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \left\{ (D_1 - D_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_2 - D_3) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \sin 2\vartheta \\ &\quad - D_4 \cos 2\vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

in which

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 2 C_6 \cos^2 \vartheta + 2 C_7 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 C_8 \sin^2 \vartheta + A_2 + B_2, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 2 C_6 \sin^2 \vartheta - 2 C_7 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 C_8 \cos^2 \vartheta - A_2 k_1^2 - B_2 k_2^2, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= -C_6 \sin 2\vartheta + C_7 \cos 2\vartheta + C_8 \sin 2\vartheta - A_2' k_1 - B_2' k_2. \end{aligned}$$

Substituting the numerical values of the constants for the second approximation into (21), we have the bending moments for  $\vartheta = \pi/4$ , as

$$M_{\alpha} = 0.4241 q b^2, \quad M_{\beta} = 0.2764 q b^2, \quad M_{\alpha\beta} = -0.0956 q b^2.$$

In the same manner, we have the bending moments for  $\vartheta = 0$  and  $\pi/2$ , as

$$M_{\alpha} = 0.4572 q b^2, \quad M_{\beta} = 0.1607 q b^2, \quad M_{\alpha\beta} = 0, \quad (\vartheta = 0),$$

$$M_{\alpha} = 0.4088 q b^2, \quad M_{\beta} = 0.3689 q b^2, \quad M_{\alpha\beta} = 0, \quad \left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right).$$

From the foregoing calculations, it may be seen that the residual moment is a smaller quantity compared with the maximum moment, and it decreases rapidly according as we take more terms in the series in (17), and so if we take only a few terms of the series we can find an approximate solution with sufficient accuracy.

Next, we shall find the deflections on the axes of  $x'$  and  $y'$ , using the solution for the second approximation. On the axis of  $x'$ , we have

$$w = \left. \begin{aligned} & \frac{4}{15} \left( \frac{A_2}{c'^4} + \frac{B_2}{c''^4} \right) x'^6 + \left\{ C_1 - \frac{2}{3} \left( \frac{A_2}{c'^2} + \frac{B_2}{c''^2} \right) \right\} x'^4 \\ & + \left\{ C_6 + \frac{1}{2} (A_2 + B_2) \right\} x'^2 + C_9 - \frac{1}{12} (A_2 c'^2 + B_2 c''^2), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

and on the axis of  $y'$ , it becomes

$$w = - \left. \begin{aligned} & \frac{4}{15} \left( \frac{A_2 k_1^6}{c'^4} + \frac{B_2 k_2^6}{c''^4} \right) y'^6 + \left\{ C_5 - \frac{2}{3} \left( \frac{A_2 k_1^4}{c'^2} + \frac{B_2 k_2^4}{c''^2} \right) \right\} y'^4 \\ & + \left\{ C_8 - \frac{1}{2} (A_2 k_1^2 + B_2 k_2^2) \right\} y'^2 + C_9 - \frac{1}{12} (A_2 c'^2 + B_2 c''^2). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

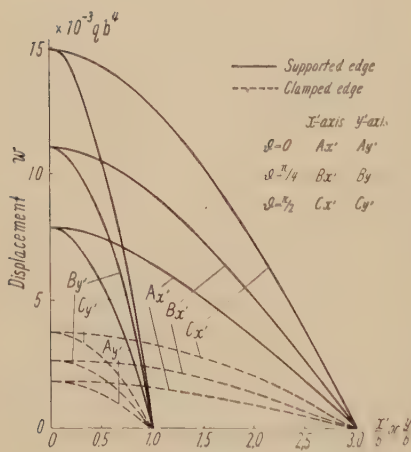


Fig. 4

Deflections on the axes of an oak plate with a supported or clamped edge, when  $a = 3b$ .

The deflections on the axes of  $x'$  and  $y'$ , calculated from equations (22) and (23), are shown in figure 4. For the convenience of comparison, the deflections for a plate with a clamped edge are also shown by dotted lines in the same figure.

### Acknowledgement

The writer takes this opportunity to express his hearty thanks to Prof. Dr. H. ŌKUBO of the Tohoku University for his kind guidance throughout the investigation.

### Zusammenfassung

Der Verfasser löst das Biegeproblem für eine dünne elliptische Platte aus orthotropem Material unter einer gleichmässigen Querlast. Er gibt Lösungen für zwei Hauptfälle an, nämlich für eingespannten und aufgelegten Rand, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Symmetrieachsen des Materials nicht mit den Ellipsenachsen zusammenfallen.

Als Beispiel wird eine Eichenplatte numerisch durchgerechnet, die parallel zu den Fasern geschnitten ist und das Achsenverhältnis 3:1 besitzt; die Ergebnisse werden mit denjenigen der isotropen Platte verglichen.

(Received: October 17, 1951.)

# Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes

Von MAX BECK, Zürich<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Damit, dass die Zahl der nichtkonservativen Stabilitätsprobleme viel kleiner ist als die der konservativen und dass sie in der Praxis relativ selten auftreten, lässt es sich wohl erklären, dass sie meist ziemlich stiefmütterlich behandelt werden. So ist zum Beispiel die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes (Figur 1) noch nie einwandfrei berechnet worden. Dieses Stabilitätsproblem wird zwar mehrfach erwähnt<sup>2)</sup>, wobei das Resultat, dass hier keine Knickgefahr bestehe, den Leser überrascht. Die vorliegende Arbeit wird nun aber zeigen, dass eine endliche Knicklast existiert.

Die Anregung, dieses Stabilitätsproblem wieder aufzugreifen, gab eine Untersuchung von H. ZIEGLER<sup>3)</sup>, in der er zeigt, dass nichtkonservative Stabilitätsprobleme nur mit dem kinetischen Stabilitätskriterium behandelt werden dürfen. Nach diesem ist die kritische die kleinste Last, unter der nicht mehr jede kleine Störung zu einer Bewegung in der nächsten Umgebung der Gleichgewichtslage führt. Das statische Kriterium, das nach der kleinsten Last fragt, für die eine nichttriviale Gleichgewichtslage existiert, kann hier zu ganz falschen Resultaten führen, während es bei konservativen Problemen mit dem kinetischen Kriterium äquivalent ist. Diese Tatsache wurde bis jetzt nicht beachtet, und so ist auch der tangential gedrückte Stab nur statisch untersucht worden.

## 2. Die Differentialgleichung

Für das Studium der kleinen Bewegungen des ursprünglich vertikalen Stabes der Figur 2 dürfen die Funktion  $y(x, t)$ , die die elastische Linie wiedergibt, und ihre Ableitungen als von erster Ordnung klein angenommen werden, und es ist erlaubt, von höherer Ordnung kleine Glieder zu vernachlässigen. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lässt sich gleich wie in der Statik ableiten, wenn bei der Ermittlung der Beanspruchung der Stabquerschnitte auch die Trägheitskräfte berücksichtigt werden:

$$dT(\xi) = \dot{y}(\xi, t) \rho F d\xi.$$

Die Dichte  $\rho$  soll im folgenden längs des Stabes konstant sein, ebenso die Biegesteifigkeit  $\alpha$ . Mit den Bezeichnungen von Figur 2 wird nach der Festigkeitslehre die Stabkrümmung  $y''$  bestimmt durch die Beziehung:

$$\alpha y'' = P[y(l) - y(x)] - H(l - x) - \int_x^l \dot{y}(\xi, t) (\xi - x) \rho F d\xi. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Assistenz für technische Mechanik, ETH.

<sup>2)</sup> L. COLLATZ, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen* (Geest & Portig, Leipzig 1949), S. 41. – A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik* (Springer, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1950), S. 217.

<sup>3)</sup> H. ZIEGLER, *Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik*, Ing.-Arch. 20, 49 (1952).

$P'$  ist in erster Näherung gleich der tangentialen Druckkraft  $P$ ; in den Knickfällen der Figuren 3a und 3b liefert auch die Lagerreaktion einen Beitrag zu  $H$ . Leitet man (1) zweimal nach  $x$  ab, so erhält man für die kleinen Schwingungen des Stabes die Differentialgleichung

$$\alpha y^{IV} + P y'' + Q F \ddot{y} = 0 \quad (2)$$

Da sie  $H$  nicht enthält, gilt sie auch für den durch eine axiale Kraft belasteten Stab. Die Lagerung der Stäbe der Figuren 3a und 3b liefert die gleichen Randbedingungen für eine axiale wie für eine tangential Druckkraft, so dass die Eigenschwingungen dieselben sind. Die bekannten Eulerschen Knicklasten gelten hier also auch für die entsprechenden nichtkonservativen Knickfälle.

Im freien Stabende verschwindet bei tangentialer Belastung sowohl die Querkraft  $Q$  als auch das Biegemoment, während bei axialem Druck  $Q$  von Null verschieden ist. Die Lösungen von (2) müssen für den Stab der Figur 1 also die Randbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0 \quad (3)$$

erfüllen.

### 3. Bestimmung der Knicklast; Diskussion

In der partiellen Differentialgleichung (2) lassen sich mit dem Produktansatz

$$y(x, t) = Y(x) T(t)$$

die Variablen trennen, wobei man mit einem Exponentialansatz sowohl für  $Y$  wie  $T$  die allgemeine Lösung findet:

$$y(x, t) = A_0 e^{\lambda x} e^{i\omega t}.$$

Damit wird (2) zur charakteristischen Gleichung:

$$\alpha \lambda^4 + P \lambda^2 - Q F \omega^2 = 0.$$

Mit den Abkürzungen

$$p = \frac{P}{\alpha}; \quad a = \frac{Q F}{\alpha}; \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{4 a \omega^2 + p^2} - p}{2}}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{4 a \omega^2 + p^2} + p}{2}}$$

lautet die allgemeine Lösung für  $Y$ :

$$Y(x) = A \cosh(\lambda_1 x) + B \sinh(\lambda_1 x) + C \cos(\lambda_2 x) + D \sin(\lambda_2 x).$$

Zur Ermittlung der vier Konstanten  $A, B, C$  und  $D$  geben die Randbedingungen (3) vier homogene lineare Gleichungen, die nur dann eine nichttriviale Lösung besitzen, wenn sie voneinander linear abhängig sind. Das ist der Fall, wenn die Eigenwertgleichung

$$\left. \begin{aligned} 0 &= f(\omega^2, p) \\ &= (2 a \omega^2 + p^2) + 2 a \omega^2 \cosh(\lambda_1 l) \cos(\lambda_2 l) + \sqrt{4 a \omega^2 + p^2} \sinh(\lambda_1 l) \sin(\lambda_2 l) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

erfüllt ist. Sie ordnet jeder Belastung  $P$  unendlich viele diskrete Eigenfrequenzen zu.

Nimmt  $P$  von Null an zu, so ist die kritische Belastung dann erreicht, wenn zum erstenmal  $\omega = 0$  die Gleichung (4) erfüllt oder wenn (4) für  $\omega$  eine Doppelwurzel besitzt. Im ersten Fall existiert eine Lösung

$$y(x, t) = y(x),$$





Fig. 1

Der einseitig eingespannte, im freien Ende tangential gedrückte Stab.

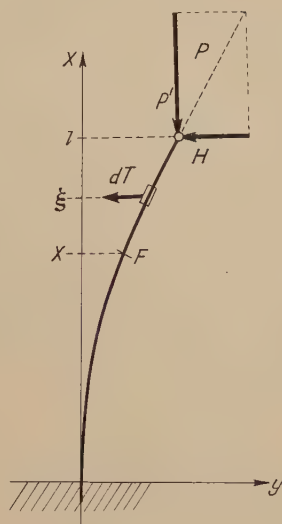


Fig. 2

Zur Berechnung des Biegemoments im Stabquerschnitt F.

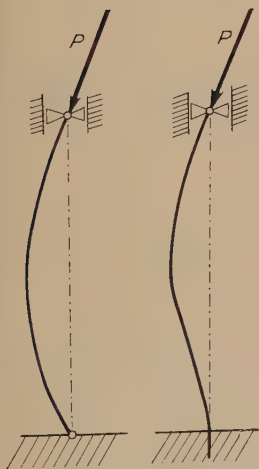


Fig. 3

Zwei weitere Knickfälle unter tangentialen Druck.

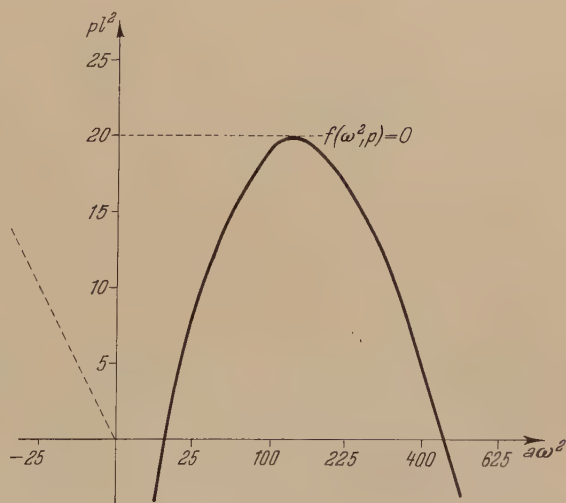


Fig. 4

Bestimmung der Knicklast aus der Eigenwertgleichung.

also eine nichttriviale Gleichgewichtslage. Die so gefundene Knicklast hätte auch statisch ermittelt werden können. Im Falle einer Doppelwurzel kann  $y$  die Form

$$y(x, t) = Y(x) t \sin(\omega t)$$

annehmen. Die nichtkonservative Druckkraft leistet bei dieser Bewegung Arbeit, so dass die Amplitude der Schwingung immer grösser wird. Eine solche Knicklast kann nur mit dem kinetischen Kriterium gefunden werden.

Gleichung (4) besitzt für kein endliches  $P$  eine Lösung mit  $\omega = 0$ . In einem Koordinatensystem mit  $\omega^2$  als Abszisse und  $p$  als Ordinate (Figur 4) wird (4) durch eine unendliche Zahl von Kurvenästen wiedergegeben, die aus dem vierten Quadranten aufsteigen, im ersten Quadranten ein Maximum erreichen und wieder in den vierten zurückfallen. Das der Ordinatenachse nächste Maximum, das in Figur 4 wiedergegeben ist, besitzt den kleinsten  $p$ -Wert und bestimmt damit die Knicklast. Die numerische Auswertung von (4) ergibt:

$$P_k = 20,05 \frac{\alpha}{l^2}.$$

Beim einseitig eingespannten, im freien Ende tangential gedrückten Stab ist also die Knickkraft achtmal grösser als die entsprechende Eulersche Knicklast. Lässt man die axiale Druckkraft über gemischte Belastungen stetig in eine tangentiale übergehen, so wird dieser hohe Wert verständlich.

Das hier gefundene Resultat gilt vorläufig nur für einen idealen, dämpfungs-freien Stab. H. ZIEGLER<sup>1)</sup> hat gezeigt, dass bei nichtkonservativen Systemen die geringste Dämpfung die Knicklast unter Umständen erheblich verkleinern kann. Es wird beim vorliegenden Problem aber nicht ganz einfach sein, einen physikalisch einwandfreien Ansatz für die Dämpfung zu finden, der die mathematischen Schwierigkeiten nicht beträchtlich erhöht.

### Summary

The author calculates the buckling load of a built-in free rod subjected to tangential end-thrust. As this stability problem is nonconservative, it cannot be solved by the usual static methods. Investigation of the free vibrations under  $P$  yields the buckling load  $P_k = 20,05 \alpha / l^2$  ( $\alpha$ : flexural rigidity,  $l$ : length). (Damping forces are not taken into account; they might diminish the actual critical load). (Eingegangen: 28. 1. 1952.)

## Bergmans Integraloperator erster Art und Riemannsche Funktion

VON PETER HENRICI, Washington, D. C.<sup>2)</sup>

Zur Integration linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus hat ST. BERGMAN den Begriff der vollständigen Lösungssysteme entwickelt<sup>3)</sup>. Darunter werden Systeme von Partikulärlösungen

<sup>1)</sup> H. ZIEGLER, *Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik*, Ing.-Arch. 20, 49 (1952).

<sup>2)</sup> American University. Die folgenden Untersuchungen wurden gemäss einem Verträge zwischen der American University und dem National Bureau of Standards, Washington, mit Förderung des Flight Research Laboratory, U. S. Air Force, ausgeführt.

<sup>3)</sup> Vgl. ST. BERGMAN, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Amer. Math. Soc. 1950, S. 112 ff., sowie die dort angegebene Literatur.

der vorgelegten Differentialgleichung verstanden mit der Eigenschaft, dass sich jede reguläre Lösung der Gleichung durch eine endliche Anzahl dieser Partikulärlösungen beliebig genau approximieren lässt.

Die Existenz solcher vollständiger Lösungssysteme kann durch die Betrachtung gewisser Minimalprobleme bewiesen werden. Dieser Beweis enthält jedoch keine explizite Vorschrift zur effektiven Konstruktion der Systeme. BERGMAN behebt diesen Nachteil im Falle eines einfach zusammenhängenden Grundgebietes  $\mathfrak{G}$ , indem er gewisse lineare Integraloperatoren  $\mathcal{Q}[f]$  angibt, die die Gesamtheit der in  $\mathfrak{G}$  regulären Funktionen einer komplexen Variablen auf die Gesamtheit der in  $\mathfrak{G}$  regulären reellen Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung abbilden. Aus der Vollständigkeit der Funktionen  $z^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) für die analytischen Funktionen einer Variablen folgt dann die Vollständigkeit der Funktionen  $\mathcal{Q}[z^n]$  für die Lösungen der Differentialgleichung.

Insbesondere definiert BERGMAN den Integraloperator erster Art durch die folgende Eigenschaft: Das Urbild einer Lösung  $u(x, y)$  der Differentialgleichung sei, wenn

$$z = x + i y, \quad z^* = x - i y \quad \text{und} \quad u(x, y) = U(z, z^*)$$

gesetzt wird, gegeben durch  $U(z, 0)$ . Für diesen Operator erster Art werden verschiedene Reihendarstellungen gegeben.

Im folgenden wird darauf hingewiesen, dass dieser Operator auf das engste mit der Riemannschen Integrationsmethode hyperbolischer Differentialgleichungen zusammenhängt und sich ausserdem in einfacher Weise durch die Grundlösung der betrachteten Differentialgleichung ausdrücken lässt.

Die gegebene Differentialgleichung sei

$$\mathcal{L}[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = 0. \quad (1)$$

Wir setzen mit BERGMAN voraus, dass  $a$ ,  $b$  und  $c$  ganze analytische Funktionen des Punktes  $P = (x, y)$  sind. Nach klassischen Sätzen existiert zu (1) für jeden Punkt  $Q = (\xi, \eta)$  eine Grundlösung von der Form

$$v(P, Q) = r(P, Q) \log \overline{PQ} + s(P, Q), \quad \overline{PQ} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad (2)$$

welche als Funktion von  $P$  der zu (1) adjungierten Differentialgleichung

$$m[v] \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial(a v)}{\partial x} - \frac{\partial(b v)}{\partial y} + c v = 0 \quad (3)$$

genügt. Mit den Koeffizienten von (1) sind auch  $r$  und  $s$  ganze analytische Funktionen von  $P$  und  $Q$ ; ferner ist

$$r(P, P) = 1. \quad (4)$$

Mit Hilfe der Grundlösung lässt sich jede in einem elementaren Gebiet der reellen  $(x, y)$ -Ebene zweimal stetig differenzierbare Lösung von (1) darstellen durch

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathfrak{G}} \left\{ \left[ v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} + a u v \right] \cos(n, \xi) + \left[ v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} + b u v \right] \cos(n, \eta) \right\} ds_Q, \quad (5)$$

wo  $u = u(Q)$  und  $v = v(Q, P)$  gesetzt ist und der Punkt  $Q$  den Rand  $\partial \mathfrak{G}$  von  $\mathfrak{G}$  (mit der inneren Normalen  $n$ ) durchläuft. Aus (5) folgt, dass  $u(P)$  in  $\mathfrak{G}$  analytisch

ist. Darüber hinaus leistet (5) auch die analytische Fortsetzung von  $u$  in jenes Gebiet des komplexen  $(x, y)$ -Raumes, in welches die analytische Fortsetzung des logarithmischen Faktors  $\log QP$  von  $v$  für alle Punkte  $Q$  auf  $\partial\mathfrak{G}$  möglich ist. Führen wir die Variablen

$$z = x + i y, \quad \bar{z} = \xi + i \eta, \quad z^* = x - i y, \quad \bar{z}^* = \xi - i \eta, \quad (6)$$

ein, so wird

$$\log PQ = \log \sqrt{(z - \bar{z})(z^* - \bar{z}^*)},$$

und wir erkennen, dass der Logarithmus nur für  $z \in \partial\mathfrak{G}$  oder  $z^* \in \partial\mathfrak{G}$  singulär wird. Damit gewinnen wir

*Satz I<sup>1)</sup>*: Die analytische Fortsetzung von  $u$  ist möglich nach allen Punkten  $(z, z^*)$  des kartesischen Produktes  $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$  des Gebietes  $\mathfrak{G}$  und seines konjugiert komplexen Gebietes  $\mathfrak{G}^2$ .

Es liegt nun nahe, die Transformation (6) schon in (1) vorzunehmen. Eine kurze Rechnung ergibt, dass, wenn

$$u(x, y) = U(z, z^*), \quad a(x, y) = A(z, z^*), \quad \dots$$

und

$$\frac{1}{4} (A + i B) = D, \quad \frac{1}{4} (A - i B) = E \quad \text{und} \quad \frac{1}{4} C = F$$

gesetzt wird, (1) dann übergeht in

$$L[U] \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial z^*} + D \frac{\partial U}{\partial z} + E \frac{\partial U}{\partial z^*} + F U = 0. \quad (7)$$

$D, E$  und  $F$  sind wieder ganze Funktionen von  $z$  und  $z^*$ . Eine entsprechende Rechnung ergibt für (3) die zu (7) adjungierte Gleichung

$$M[V] \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial z^*} - \frac{\partial(DV)}{\partial z} - \frac{\partial(EV)}{\partial z^*} + FV = 0. \quad (8)$$

(7) ist eine in  $z$  und  $z^*$  hyperbolische Differentialgleichung. Beschränken wir uns für den Augenblick auf reelle Werte von  $z$  und  $z^*$ , so können wir sie mit Hilfe der Riemannschen Integrationsmethode integrieren. Insbesondere können wir so das charakteristische Problem lösen, das heisst diejenige Lösung von (7) bestimmen, die auf je einer Charakteristik der beiden Scharen [die in der Normalform (7) durch  $z = \text{const}$  und  $z^* = \text{const}$  gegeben sind] gegebene Werte annimmt. Verlegen wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Schnittpunkt der Anfangscharakteristiken und schreiben wir

$$U(z, 0) = f(z), \quad U(0, z^*) = f^*(z^*) \quad [f(0) = f^*(0)] \quad (9)$$

vor, so ist die Lösung<sup>2)</sup> des charakteristischen Problems gegeben durch

<sup>1)</sup> Vgl. ST. BERGMAN, *Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen*, *Recueil math. [nouv. s.]* 2, 1169–1198 (1939).

<sup>2)</sup>  $\mathfrak{G}$  bedeutet jetzt das dem soeben betrachteten Gebiet  $\mathfrak{G}$  der reellen  $(x, y)$ -Ebene vermöge der Abbildung  $(x, y) \rightarrow z = x + i y$  entsprechende Gebiet der Gaußschen Ebene.

<sup>3)</sup> R. COURANT und D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. 2 (Springer, Berlin 1937), S. 316.



$$\left. \begin{aligned} U(\zeta, \zeta^*) = F(0, 0; \zeta, \zeta^*) = f(0) + \int_0^{\zeta} F(z, 0; \zeta, \zeta^*) \left[ \frac{\partial f}{\partial z} + E(z, 0) f \right] dz \\ + \int_0^{\zeta^*} F(0, z^*; \zeta, \zeta^*) \left[ \frac{\partial f^*}{\partial z^*} + D(0, z^*) f^* \right] dz^* \\ \equiv \Omega[f, f^*]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Hier bedeutet  $F(z, z^*; \zeta, \zeta^*)$  die sogenannte Riemannsche Funktion der Gleichung (7), die den folgenden Bedingungen genügt:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad M[F] &= 0 \text{ in bezug auf } z \text{ und } z^*; \\ (b) \quad \frac{\partial F}{\partial z}(z, \zeta^*; \zeta, \zeta^*) - E(z, \zeta^*) F(z, \zeta^*; \zeta, \zeta^*) &\equiv 0 \text{ in } z, \zeta \text{ und } \zeta^*; \\ (c) \quad \frac{\partial F}{\partial z^*}(\zeta, z^*; \zeta, \zeta^*) - D(\zeta, z^*) F(\zeta, z^*; \zeta, \zeta^*) &\equiv 0 \text{ in } z^*, \zeta \text{ und } \zeta^*; \\ (d) \quad F(\zeta, \zeta^*; \zeta, \zeta^*) &\equiv 1 \text{ in } \zeta \text{ und } \zeta^*. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Diese Riemannsche Funktion ist aber, wie schon HADAMARD<sup>1)</sup> bemerkt hat, identisch mit dem gemäss (6) transformierten Koeffizienten des Logarithmus in der Grundlösung (2) von (1), das heisst, es gilt

$$F(z, z^*; \zeta, \zeta^*) \equiv R(z, z^*; \zeta, \zeta^*) \equiv r(x, y; \xi, \eta). \quad (12)$$

Der Beweis dieses überraschenden Sachverhaltes fliesst sehr einfach aus dem Umstand, dass kraft (3) und (6)  $V(z, z^*; \zeta, \zeta^*) = v(x, y; \xi, \eta)$  der Differentialgleichung (8) genügt:

$$\begin{aligned} M[V] = M[R] \log \sqrt{(z - \zeta)(z^* - \zeta^*)} + \frac{1}{2(z - \zeta)} \left[ \frac{\partial R}{\partial z^*} - D R \right] \\ + \frac{1}{2(z^* - \zeta^*)} \left[ \frac{\partial R}{\partial z} - E R \right] + \text{reguläre Funktion} = 0. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Singularitäten auf beiden Seiten und unter Berücksichtigung von (4) folgen hieraus für  $R$  die Bedingungen (11). Wegen der (klassischen) eindeutigen Bestimmtheit der Riemannschen Funktion folgt hieraus (12). Insbesondere ist damit auch gezeigt, dass die Riemannsche Funktion der Gleichung (7) eine ganze Funktion ist. Damit ergibt sich

*Satz II. Wählt man  $f(z)$  und  $f^*(z^*)$  als in  $\mathfrak{G}$  bzw.  $\mathfrak{G}$  analytische Funktionen, so ist die durch (10) (mit  $F = R$ ) definierte Funktion  $U(\zeta, \zeta^*)$  in  $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$  analytisch. Speziell ist sie auch für  $\zeta^* = \bar{\zeta}$ , das heisst im reellen Gebiete  $\mathfrak{G}$ , regulär.*

Aus den Sätzen I und II ergibt sich, dass die Formeln (9) und (10) eine eindeutige Abbildung der Menge der in  $\mathfrak{G}$  regulären Lösungen von (1) auf die Menge der Paare  $(f, f^*)$  von in  $\mathfrak{G}$  bzw.  $\mathfrak{G}$  regulären Funktionen einer Variablen [mit  $f(0) = f^*(0)$ ] liefern. Da gemäss (10)  $\Omega[f, f^*]$  stetig und linear von  $f$  und  $f^*$  abhängt, folgt damit auch die Vollständigkeit des Systems

$$\{ \Omega[z^n, 0], \Omega[0, z^{*m}] \}. \quad (n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots)$$

<sup>1)</sup> COURANT-HILBERT, I. c., S. 431.

Wenn die Grundlösung von (1) bekannt ist – und das ist bei vielen physikalischen Problemen der Fall –, so kann der Operator (10) in geschlossener Form dargestellt werden. Ist  $u(x, y)$  für reelle  $x$  und  $y$  reell, so ist  $U(0, z^*) = U(z^*, 0)$ , und (9) wird mit der Umkehrformel für den Operator erster Art identisch. Daraus folgt die Identität von (10) mit diesem Operator<sup>1)</sup>.

Es ist sehr instruktiv, die geschilderten Verhältnisse am Beispiel der Wellengleichung zu verfolgen. Wir hoffen, diese Diskussion an anderer Stelle geben zu können.

### Summary

ST. BERGMAN transforms by means of the so-called Integral Operator of the first kind analytic functions of one complex variable into solutions of a given partial differential equation of elliptic type. It is shown in the present paper that this transformation can be interpreted as the solution of a certain hyperbolic equation by RIEMANN'S method. Furthermore, BERGMAN'S operator is expressed in terms of the fundamental solution of the considered elliptic equation.

(Eingegangen: 26. 2. 1952.)

## Zum Ergodenproblem

VON RUDOLF KURTH, Bern<sup>2)</sup>

### Übersicht

Auf die Frage nach der Ersetzbarkeit des Zeitmittels einer Phasenfunktion durch ihr Phasenmittel (§ 1) wird eine elementare, aber für die konkreten Anwendungen noch am ehesten brauchbare Antwort gegeben (§§ 2 und 3). Der Erwartungswert der mittleren Verweilzeit ist dem durchlaufenen Volumen zwar proportional, aber die individuellen Abweichungen können relativ gross sein (§ 4).

### § 1. Die Fragestellung

Es liege ein mechanisches System von endlich vielen Freiheitsgraden vor. Seine Hamilton-Funktion sei von der Zeit  $t$  unabhängig. Die Hamiltonschen Gleichungen mögen bei beliebig vorgegebenen Anfangswerten für alle  $t$  eine eindeutige, stetig differenzierbare Lösung besitzen. Sie definieren dann im Phasenraume  $\Gamma$  eine einparametrische Transformationsgruppe – anschaulich gesprochen: eine stationäre Strömung.  $J$  schliesslich sei eine dieser Gruppe gegenüber invariante Teilmenge des Phasenraumes; sie sei (LEBESGUE) messbar und von beschränktem positivem Masse.

<sup>1)</sup> BERGMAN'S Operator zweiter Art (vgl. etwa ST. BERGMAN, *The Approximation of Functions Satisfying a Linear Partial Differential Equation*, Duke math. J. 6, 537–561 [1940]) kann in folgender Weise als Modifikation des Operators erster Art gedeutet werden: Die Menge der Paare  $(f, f^*)$  wird nicht direkt auf die Menge  $(L)$  der Lösungen von (1), sondern zunächst in nichttrivialer Weise auf sich selbst und erst dann auf  $(L)$  abgebildet, was gelegentlich (zum Beispiel im Falle der Differentialgleichung der kompressiblen Flüssigkeiten) rechnerische Vereinfachungen mit sich bringt.

<sup>2)</sup> Astronomisches Institut der Universität Bern.

Übrigens genügt es für das folgende, wenn die Gruppe nur für fast alle Anfangspunkte  $x \in J$  definiert ist.

$f_0(x)$ ,  $x \in J$ , sei nun irgendeine in  $J$  definierte und summable Funktion (eine «Phasenfunktion»). Bedeutet  $x(t)$  das von der Gruppe zur Zeit  $t$  erzeugte Bild des Anfangspunktes  $x$  und  $f(x, t)$  die Funktion  $f_0[x(t)]$ , so lautet eine Folgerung aus dem Liouvilleschen Satze:  $f(x, t)$  ist über  $J$  summierbar, und es ist

$$\int_J f(x, t) dx = \int_J f_0(x) dx.$$

Darin ist enthalten: Die Strömung ist inkompressibel.

Ferner gilt der Satz von BIRKHOFF: Das «Zeitmittel»

$$\hat{f} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t f(x, \tau) d\tau}{\int_0^t d\tau}$$

existiert für fast alle  $x \in J$ .

Vielfach ist es üblich,  $J$  auf einer Fläche konstanter Energie zu wählen. Begriffe und Sätze sowie der folgende Satz übertragen sich auf diesen Fall ohne weiteres bei Einführung eines invarianten Flächenmasses.

Die Ergodenhypothese besagt nun: Das Zeitmittel ist für fast alle  $x \in J$  gleich dem «Phasenmittel»  $\bar{f}_0$ , definiert durch

$$\bar{f}_0 = \frac{\int_J f_0(x) dx}{\int_J dx}.$$

Es ist bekannt: Die Hypothese gilt dann und nur dann, wenn  $J$  «metrisch unzerlegbar» (metrisch transitiv) ist. Metrische Unzerlegbarkeit bedeutet: Für jede messbare invariante Teilmenge  $J' \subset J$  ist entweder  $J'$  oder  $J - J'$  Nullmenge.

Indessen kennt man kein allgemeines Kriterium für metrische Unzerlegbarkeit. So scheint durch die neue Formulierung der zu beweisenden Behauptung wenigstens bis jetzt kaum etwas gewonnen zu sein.

## § 2. Zur Antwort

Zunächst: Die Ergodenhypothese gilt sicherlich nicht *allgemein* – und vor allem nicht in den für die Anwendung wichtigen Fällen: Für die meisten «vernünftigen» mechanischen Systeme gelten die Sätze von der Erhaltung des Impulses und des Drehimpulses, und für deren Komponenten trifft die Behauptung  $\hat{f} = \bar{f}_0$  im allgemeinen nicht zu. Die entsprechenden invarianten Teilmengen sind metrisch zerlegbar.

Vergegenwärtigen wir uns den Zweck der Ergodenhypothese: Es soll die Ersetzung des in der statistischen Mechanik benötigten, gewöhnlich aber unbekannten Zeitmittels durch das leichter zu berechnende Phasenmittel gerechtfertigt werden. In der erstrebten Weise ist das allgemein also nicht möglich. Aber in anderer. Der folgende Satz gibt hierüber Auskunft:

Satz: 1. Der Erwartungswert des Zeitmittels (das ist sein Phasenmittel) ist gleich dem Phasenmittel der Phasenfunktion selbst.

2. Die mittlere Abweichung der Zeitmittel gegen ihren Erwartungswert ist höchstens gleich der mittleren Abweichung der Phasenfunktion gegen ihr Phasenmittel.

3. Diese Abschätzung kann allgemein nicht mehr verschärft werden.

In Zeichen:

$$1. \quad \bar{\hat{f}} = \bar{f}_0 \quad \text{für alle } f_0;$$

$$2. \quad \overline{(\hat{f} - \bar{\hat{f}})^2} \leq \overline{(f_0 - \bar{f}_0)^2} \quad \text{für alle } f_0;$$

$$3. \quad \overline{(\hat{f} - \bar{\hat{f}})^2} = \overline{(f_0 - \bar{f}_0)^2} \quad \text{für mindestens ein } f_0.$$

Der Satz ermöglicht also die Anwendung der *naturwissenschaftlichen Methode*: Ersetzung eines unbekannten Individualwertes durch den bekannten Erwartungswert und Abschätzung des mittleren Fehlers.

*Beweis:* Alle hingeschriebenen Mittelwerte existieren auf Grund der Voraussetzungen und den Sätzen von LIOUVILLE und BIRKHOFF zufolge. Es ist nun

$$1. \quad \bar{\hat{f}} = \hat{f} = \hat{f}_0 = f_0$$

nach dem Liouvilleschen Satze.

$$2. \quad \overline{(\hat{f} - \bar{\hat{f}})^2} = \overline{(\hat{f} - \bar{f}_0)^2} = \overline{\hat{f}^2} - \bar{f}_0^2$$

nach 1. Mittels der Schwarzischen Ungleichung folgt weiter

$$\hat{f}^2 \leq \hat{f}^2,$$

$$\hat{f}^2 \leq \hat{f}^2 = \bar{f}_0^2,$$

$$(\hat{f} - \bar{\hat{f}})^2 \leq \bar{f}_0^2 - f_0^2 = (f_0 - \bar{f}_0)^2.$$

3. Man wähle für  $f_0$  ein zeitunabhängiges erstes Integral der Hamiltonschen Gleichungen, etwa eine Komponente des Drehimpulses.

### § 3. Korollar

Der bewiesene Satz gilt wörtlich auch für Zeitmittel über beliebige *beschränkte* Zeitintervalle. Ferner auch für Phasenmittel, die mit irgendeiner in  $J$  definierten positiven summierbaren invarianten Belegungsfunktion  $\mu(x)$  gebildet werden; für die Invarianz ist hinreichend und unerlässlich, dass  $\mu$  allein von zeitunabhängigen ersten Integralen der Hamiltonschen Gleichungen abhängt.

Die erste Bemerkung schränkt die Bedeutung des Birkhoffschen Satzes für die Anwendungen ein. Die zweite kann wichtig werden, wenn es nicht gelingt, eine in Betracht kommende invariante Teilmenge  $J \subset \Gamma$  mit beschränktem positivem Masse wirklich zu bestimmen. Dann suche man mittels einer geeigneten Belegungsfunktion dem ganzen Phasenraume  $\Gamma$  ein endliches Mass zu geben und setze  $J = \Gamma$ .

### § 4. Anwendung

$M$  sei eine messbare Teilmenge von  $J$  und  $q_M(x)$  ihre charakteristische Funktion:

$$q_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M, \\ 0 & \text{für } x \in J - M. \end{cases}$$



Dann ist für  $f_0(x) \equiv \varphi_M(x)$

$$\bar{f}_0 = \frac{\text{Mass von } M}{\text{Mass von } J} = \frac{|M|}{|J|} = p$$

die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Punkt  $x \in J$  zu  $M$  gehört. Ferner ist

$$\hat{f} = \frac{\text{Zeitdauer, für die } t \in T \text{ und } x(t) \in M}{|T|} \neq \tau$$

die relative Verweilzeit des auf der Bahnkurve durch  $x$  laufenden Phasenpunktes  $x(t)$  in der Menge  $M$ ;  $|T|$  bedeutet hierbei die Länge des bei der Zeitmittlung zugrunde gelegten Zeitintervalls  $T$ . Der Satz in § 2 liefert für die relative Verweilzeit unmittelbar die beiden Aussagen.

$$\bar{\tau} = p, \quad (\tau - \bar{\tau})^2 \leq p(1-p).$$

Die Behauptung « $\tau = p$  für fast alle  $x \in J$ » trifft nur in Sonderfällen zu, zum Beispiel bei Systemen mit nur einem Freiheitsgrade und fest vorgegebener Energie. Im allgemeinen ist sie durch die soeben gemachten Aussagen zu ersetzen.

Die Fehlerabschätzung lässt sich nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen verschärfen, wie das Beispiel des harmonischen Oszillators zeigt: Für  $J$  und  $M$  wählen wir das Innere je einer Bahnellipse, und zwar so, dass

$$|M| = \frac{1}{2} |J|.$$

Dann ist

$$\tau = \varphi_M(x) \neq p \text{ für alle } x \in J,$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2} = p,$$

$$|\tau - \bar{\tau}| = \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{(\tau - \bar{\tau})^2} = \frac{1}{2} = \sqrt{p(1-p)} = \max_{0 < q < 1} \sqrt{q(1-q)}.$$

## LITERATURVERZEICHNIS

- A. J. KHINCHIN, *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics* (Verlag, New York 1949).  
E. HOPF, *Ergodentheorie* (Verlag, Berlin 1937). Hier auch weitere Literaturhinweise.

### Summary

Let  $J$  be a measurable invariant part of the phase space of a given mechanical system, and let  $J$  have the positive finite measure  $|J|$ . For  $J$  the following elementary statements are proved: (1) The mathematical expectation of the time average of any phase function coincides with its phase average. (2) The dispersion of the time average is not larger than that of the phase function. (3) The mathematical expectation of the time  $\tau$  of running through a measurable set  $M \subseteq J$  equals  $p = |M|/|J|$ . (4) The dispersion of  $\tau$  is  $\leq \sqrt{p(1-p)}$ . (5) Generally the limits (2) and (4) cannot be reduced.

(Eingegangen: 15. 1. 1952.)

---

 Varia – Miscellaneous – Divers
 

---

**International Union of Pure and Applied Physics**

Under the patronage of the *International Union of Pure and Applied Physics* the two following meetings will be held during September 1952:

**“ $\beta$  and  $\gamma$  Radioactivity”** at Amsterdam, from September 1<sup>st</sup> to 6<sup>th</sup> incl.

*Subjects*

- (1) Beta desintegrations. Allowed and forbidden transitions;  $K$ -capture.
- (2) Gamma transitions and internal conversion.
- (3) Systematics of the beta and gamma decay and the shellmodel.
- (4) Angular and polarization correlation.
- (5) Instruments for beta and gamma spectroscopy.
- (6) Energy calibration of beta and gamma spectrosopes.
- (7) Measurements of beta particles of small energy.
- (8) Coincidence method for the analysis of complex spectra and for the determination of correlations.
- (9) Experiments of nuclear recoil and the detection of the neutrino.

Detailed information can be obtained from the Secretary, Prof. Dr. J. DE BOER, Institute für Theoretical Physics, Roetersstraat 1 A, Amsterdam, Netherland.

**“Structure and Properties of Solid Surfaces”** at Chicago, Ill., from September 29<sup>th</sup> to October 1<sup>st</sup> incl.

*Subjects*

- (1) Structure of crystal surfaces.
- (2) The thermodynamics of crystal surfaces; surface free energy, entropy and tension.
- (3) Atomic mobility and reaction on surfaces.
- (4) Crystal growth from vapor, melt, and solution.
- (5) Electrical properties of surfaces of metals, semi-conductors and insulators.
- (6) Surfaces of non-crystalline solids, particularly glasses.
- (7) Cohesion and friction.
- (8) Influence of surface on deformation of crystals.

Detailed information can be obtained from the Secretary of the Organizing Committee: C. S. SMITH, Institute for the Study of Metals, Chicago 37, Ill., U.S.A.

A. PERRIER, Swiss National Committee of Physics.

---

**International Contest**

The Institute for the Unity of Science is offering a prize of \$500 for the best essay on the theme *Mathematical Logic as a Tool of Analysis: Its Uses and Achievements in the Sciences and Philosophy*. Two additional prizes of \$200 each will be given for the next best two essays. It is an International Contest and is open to everyone. Essays must not exceed 25,000 words. They may be written in English, French or German and must be submitted before January 1<sup>st</sup>, 1953. Further information can be obtained from the Institute for the Unity of Science, American Academy of Arts and Sciences, 28 Newbury Street, Boston 16, Massachusetts.

PHILIPP G. FRANK, Harvard University.

### 3. Österreichischer Mathematikerkongress, Salzburg, 9. bis 14. September 1952

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft veranstaltet anlässlich des 3. Österreichischen Mathematikerkongresses wiederum ein *Internationales Mathematikertreffen* in Salzburg, in der Zeit vom 9. bis 14. September 1952.

Die wissenschaftliche Arbeit des Kongresses wird sich in die folgenden Sektionen gliedern: Analysis; Geometrie und Topologie; Algebra und Zahlentheorie; Angewandte Mathematik; Geschichte und Philosophie. Bereits haben sich über 400 Vertreter aus folgenden Ländern angemeldet: Algerien, Belgien, Brasilien, Dänemark, Deutschland, England, Finnland, Frankreich, Griechenland, Italien, Jugoslawien, Kanada, Niederlande, Nigeria, Norwegen, Polen, Schweden, Spanien, Schweiz, Südafrika, Tschechoslowakei und den USA.

Anmeldungen und Anfragen sind zu richten an das Sekretariat der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Technische Hochschule, Karlsplatz 13, Wien IV.  
R. INZINGER

### Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik

Zeitschrift für das Gesamtgebiet der Werkstoffkunde und der Werkstoffprüfung

Seit Beginn dieses Jahres ist das Schweizer Archiv in neuer Aufmachung erschienen. Im Geleitwort zur ersten Nummer des neuen Jahrganges wird darauf hingewiesen, dass die Zeitschrift sich in Zukunft auf das Gebiet der Werkstoffforschung und Werkstoffprüfung beschränken und konzentrieren will. Da dieses Gebiet der angewandten Wissenschaften sich in den letzten Jahren auch in der Schweiz stark entwickelt hat, ist es sehr zu begrüßen, dass dieser Forschungszweig sein eigenes Publikationsmittel gefunden hat. Zu unserer lebhaften Genugtuung ist es damit automatisch auch zu einer besseren Abgrenzung der Sachgebiete mit der ZAMP gekommen, die sicherlich nur zum Nutzen beider Zeitschriften gereichen wird.

Die Schriftleitung des Schweizer Archivs verbleibt auch weiterhin in den Händen von PD. Dr. H. STÄGER; ihm zur Seite steht eine Redaktionskommission mit einem Redaktionsausschuss, dessen Präsidium Direktor A. IMHOF inne hat.

Die Redaktion.

### Errata

**Sur la thermodynamique des processus irréversibles.** Par KYRILLE POPOFF (ZAMP 3, Fasc. 1, 42 [1952]).

Au lieu de  $X_k$  des formules (4), (5), (10) lire  $-X_k$ , c'est-à-dire

$$\delta(\Delta S) = - \sum_k X_k \delta x_k, \quad \Delta \dot{S} = - \sum_k X_k \dot{x}_k$$

au lieu de

$$\delta(\Delta S) = \sum_k X_k \delta x_k, \quad \Delta \dot{S} = \sum_k X_k \dot{x}_k$$

et

$$\frac{x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_r'^2}{2} + \Delta S = C \quad (11)$$

au lieu de

$$\frac{x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_r'^2}{2} = \Delta S + C. \quad (11)$$

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

**Vorlesungen über theoretische Physik**, Bd. III: *Elektrodynamik*. Von A. SOMMERFELD (Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948). 367 S., 48 Abb.; DM. 15.-.

Inhalt: I. Grundlagen und Grundbegriffe der Maxwellschen Elektrodynamik; II. Ableitung der Erscheinungen aus den Maxwellschen Gleichungen; III. Relativitätstheorie und Elektronentheorie; IV. Die Maxwellsche Theorie für bewegte Körper und andere Ergänzungen.

Im I. Teil werden die Maxwellschen Gleichungen (in Integral- und Differentialform) axiomatisch an die Spitze gestellt und vor allem die prinzipiellen und praktischen Vorzüge des Giorgischen Maßsystems herausgearbeitet.

Im II. Teil werden die klassischen Anwendungen der Maxwellschen Gleichungen von den einfachsten elektrostatischen Problemen bis zur Dipolstrahlung und den Drahtwellen durchgerechnet.

Teil III bringt vor allem eine sehr klare Ableitung der speziellen Relativitätstheorie aus der Forderung der relativistischen Invarianz der Maxwellschen Gleichungen, Teil IV neben der Elektrodynamik bewegter Körper eine fast elementare Behandlung wichtiger Sätze der allgemeinen Relativitätstheorie.

Den Schluss bilden 25 sehr instruktive Übungsaufgaben aus allen vier Teilen des Buches.

Weder der Name SOMMERFELD noch die berühmte Buchserie seiner *Vorlesungen über theoretische Physik* bedürfen einer Empfehlung; beide sind schlechthin «klassisch». Der Praktiker wird vor allem den klaren, deduktiven Aufbau des Hauptteils: «Ableitung der Erscheinungen aus den Maxwellschen Gleichungen» sowie die konsequente Anwendung des Giorgischen Maßsystems schätzen; der Theoretiker dagegen wird hauptsächlich die glänzende Ableitung der speziellen Relativitätstheorie aus der Invarianz der Maxwellschen Gleichungen mit Begeisterung lesen. Das Buch ist weder textlich noch drucktechnisch als Nachschlagewerk geeignet; es ist ein klassisches Lehrbuch, sicher das beste, das je über dieses Gebiet geschrieben worden ist. Es stellt an den Leser hohe Anforderungen, bringt ihm aber grossen Gewinn.

P. Scherrer.

**Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der höheren Analysis für Physiker, Mathematiker und Ingenieure**. Von F. SCHWANK (B. G. Teubner, Leipzig 1951), 406 S., 147 Abb.; DM. 22.50.

Das Buch kann den Ingenieuren und Physikern, die in möglichst einfacher Weise in die Behandlung von Randwertproblemen und von verwandten Aufgaben eingeführt zu werden wünschen, warm empfohlen werden. Der Verfasser hat sich bemüht, die mathematischen Ableitungen einfach und ausführlich darzustellen; auf Existenz- und Konvergenzbeweise hat er im allgemeinen verzichtet.



Nach der mathematischen Seite hin setzt die Lektüre des Buches nur die Kenntnis der Grundlagen der Differential- und Integralrechnung voraus; bei der Behandlung von physikalischen und technischen Beispielen wird die Kenntnis der betreffenden Grundgesetze ebenfalls vorausgesetzt.

Das erste Kapitel gibt eine Einführung in die Darstellung und Lösung der Randwertprobleme der schwingenden Saite und des schwingenden Stabes. Im zweiten Kapitel ist die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen bis zu den Anwendungen des Cauchyschen Integralsatzes entwickelt. Ein drittes Kapitel behandelt an Hand konkreter Aufgaben aus der Potentialtheorie, der Theorie der Membran- und Plattenschwingungen und der Theorie der Wärmeleitung die wichtigsten vorkommenden Differentialgleichungen und ihre Lösungen (Legendresche Polynome, Kugelfunktionen, Besselsche Funktionen usw.). Das vierte Kapitel führt in die Theorie der Integralgleichungen und ihrer Anwendungen ein, das fünfte in die Variationsrechnung und das sechste in die Theorie und Praxis der Differenzengleichungen. Literaturangaben sind am Ende jedes Kapitels gegeben; in einem Anhang findet der Leser eine kurze Rekapitulation der Hauptsätze über Determinanten, lineare Gleichungssysteme, Kurvenintegrale, unendliche Reihen, lineare Differentialgleichungen, die im Buch zur Verwendung kommen.

M. Plancherel

**Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems.** By J. J. STOKER (Interscience Publishers, Inc., New York 1950), 273 pp., \$5.—.

Das Buch ist aus Vorlesungen und Seminarien des Verfassers an der New York University entstanden und stellt den zweiten Band der von ihm zusammen mit H. BOHR und R. COURANT herausgegebenen Reihe «Pure and Applied Mathematics» dar. Es ist als Lehrbuch für Ingenieure und Physiker konzipiert und führt in vorbildlich klarer Weise sowie in ständiger Fühlung mit praktischen Beispielen in die Theorie der nichtlinearen Schwingungen mit einem Freiheitsgrad ein. Was das Werk vor anderen Publikationen auf diesem Gebiet auszeichnet, ist die Kunst des Verfassers, bei aller Fülle des Stoffes die Akzente auf das Wesentliche zu setzen, ferner die strenge Systematik, mit der die Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = F \cos \omega t$$

nach ihren praktischen Erscheinungsformen zerlegt und im Hinblick auf die besonderen Merkmale ihrer Lösungen diskutiert wird.

Die einzelnen Kapitel umfassen: I. lineare Schwingungen ( $\varphi = c \dot{x}$ ,  $f = kx$ ), II. freie, ungedämpfte nichtlineare Schwingungen ( $\varphi = 0$ ,  $F = 0$ ), III. freie, gedämpfte Schwingungen ( $F = 0$ ), erzwungene Schwingungen mit IV. nichtlinearer Rückstellkraft ( $\varphi = c \dot{x}$ ) und V. nichtlinearer Dämpfung ( $f = kx$ ) sowie VI. quasilineare Schwingungen [ $\varphi = p(t) \cdot \dot{x}$ ,  $f = q(t) \cdot x$ ,  $F = 0$ ]; eine Reihe von Existenz- und Eindeutigkeitsbeweisen sind im Anhang zusammengefaßt. H. Ziegler

**Handbuch der Laplace-Transformation**, Bd. I, *Theorie der Laplace-Transformation*. Von G. DOETSCH (Verlag Birkhäuser, Basel 1950). 581 S., 40 Abb.; sFr. 78.—.

Es handelt sich um die zu einem Handbuch erweiterte und verbesserte Ausgabe des 1937 erschienenen Werkes *Theorie und Anwendungen der Laplace-Transformation* des gleichen Verfassers. Der vorliegende erste Band korrespondiert dabei im wesentlichen mit den Teilen I, II, und III der alten Ausgabe, beschränkt sich aber auf die Theorie, die indessen erschöpfend behandelt wird. Insbesondere



sind neben anderem die Parsevalsche Gleichung, die Erweiterung der Laplace-Transformation durch arithmetische Mittelbildung und die Umkehrung der Transformation durch Reihenentwicklung in der neuen Ausgabe weit ausführlicher behandelt. Die Anwendungen werden gesamthaft im zweiten Band zu finden sein.

Inhaltsübersicht von Band 1: 1. Teil: Grundlegende analytische und funktionentheoretische Eigenschaften der Laplace-Transformation. Hier werden unter anderem behandelt: Konvergenzeigenschaften, Abbildung der Differentiation und Integration, Faltung; ferner auch Verhalten der Bildfunktion bei Annäherung an  $s = \infty$ . 2. Teil: Umkehrung der Fourier- und Laplace-Transformation, die Parsevalsche Gleichung, Umkehrung durch Reihenentwicklung, Darstellungsproblem. 3. Teil: Die Cesàroschen arithmetischen Mittel des Laplace-Integrals und die  $\mathcal{Q}^K$ -Transformation. 4. Teil: Die Laplace-Transformation spezieller Klassen von Funktionen (insbesondere von ganzen Funktionen vom Exponentialtypus). 5. Teil: Abelsche und Taubersche Sätze (Theoretische Grundlagen der Asymptotik). Am Schluß folgen ein Anhang mit Hilfssätzen und historischen Bemerkungen sowie ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Dieses umfassende Werk wird der Theorie und Praxis gleichermaßen wertvolle Dienste leisten und kann als Nachschlagewerk für alle theoretischen Fragen über die Laplace-Transformation wärmstens empfohlen werden.

*H. Rutishauser*

### **An Essay toward a Unified Theory of Special Functions, Based upon the Functional Equation**

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z, \alpha) = F(z, \alpha + 1).$$

By C. TRUESDELL (Princeton University Press, 1948). 188 pp.; \$3.00.

Les fonctions classiques de la physique mathématique (fonctions Beta et Gamma, fonctions hypergéométriques, fonctions de Legendre, de Jacobi, de Gegenbauer, de Laguerre, d'Hermite, de Weber, fonctions de Bessel et de Hankel, etc.) satisfont à un grand nombre de relations, disparates au premier abord. Ces fonctions peuvent être obtenues à partir de fonctions génératrices relativement simples; elles s'expriment par suite par des intégrales de contour ou des intégrales définies et elles satisfont à des équations aux différences.

L'auteur montre que toutes ces relations découlent du fait que ces fonctions sont des solutions d'équations aux différences du type général

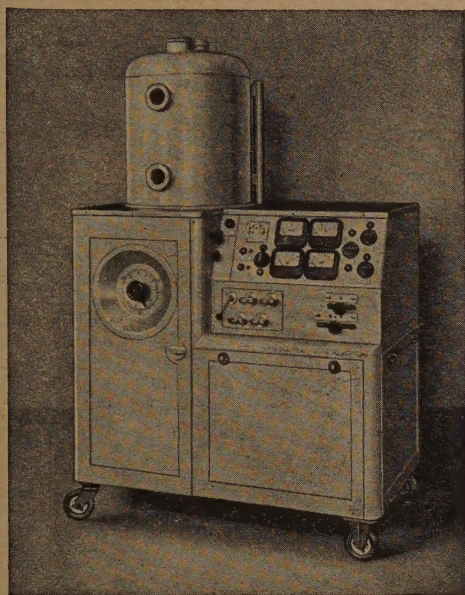
$$\frac{\partial}{\partial y} f(y, \alpha) = A(y, \alpha) f(y, \alpha) + B(y, \alpha) f(y, \alpha + 1)$$

où  $A$  et  $B$  sont des fonctions données et  $B \not\equiv 0$ . Par une transformation convenable, cette équation aux différences se ramène au type

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z, \alpha) = F(z, \alpha + 1).$$

L'ouvrage est consacré à l'étude systématique de cette dernière équation. Cette étude permet non seulement de retrouver les formules connues en unifiant les théories des diverses fonctions citées plus haut; elle donne aussi plusieurs relations nouvelles et pose des problèmes qui attendent encore leur solution.

*M. Plancherel*



Gerätebauanstalt Balzers

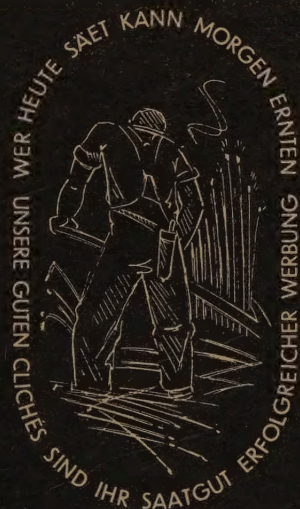
## Hochvakuum- Bedampfungsanlagen

zur Herstellung dünnster Schichten im Vakuum. Besonders geeignet zur Optikvergütung, Herstellung hochwertiger Spiegel und Beschattung von Präparaten für Elektronenmikroskope. Dreistufige Öl-Diffusionspumpe hoher Saugleistung, zweistufige Vorvakuumpumpe, Vakuummeßgeräte für  $10^{-5}$  bis 1 mmHg. Unter Vakuum rotier. Drehvorrichtung zur Erzielung gleichmäßiger Schichten.

Verkaufsorganisation

**Trüb, Täuber & Co. AG., Zürich**

Fabrik elektrischer Meßinstrumente  
und wissenschaftlicher Apparate



# QUALITÄT

*Lichter*  
**STEINER+CO BASEL**

SCHÜTZENMATTSTRASSE 31 · TELEPHON 49910/19



# ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES OF MATHEMATICS ARCHIVES DE MATHÉMATIQUES

Herausgegeben in Verbindung  
mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach  
von H. KNESER und W. SÜSS

Beirat: G. BOL, E. BOMPIANI, P. TEN BRUGGENCATÉ, J. DIEUDONNÉ, CH. EHRESMANN, H. GÖRTLER, H. HADWIGER, H. HOPF, W. MAGNUS, T. NAGELL, CHR. PAUC, J. RADON, K. REIDEMEISTER, J. A. SCHOUTEN, H. SEIFERT, E. SPERNER, E. STIEFEL

Redaktion: H. BILHARZ, Universität Freiburg i. Br.

Erscheint seit 1948; jetzt ab Band 3 (1952) regelmässig in 6 Heften von je ca. 80 Seiten Umfang. Format 17×24 cm. Abonnementspreis pro Band sFr. 60.- (DM 60.-), Einzelheft sFr. 12.- (DM 12.-)

Das ARCHIV DER MATHEMATIK veröffentlicht in erster Linie *Originalarbeiten* aus dem Gesamtgebiet der Mathematik und ihrer unmittelbaren Anwendungen (bis zu 10 Druckseiten Umfang) in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache. Daneben können in beschränktem Masse *Selbstreferate* über bislang unveröffentlichte grössere Arbeiten, deren wissenschaftliche Bedeutung dies gerechtfertigt erscheinen lässt, Aufnahme finden. In diesen Selbstreferaten werden ausser den Resultaten die wesentlichen Schritte der Beweisführung mitgeteilt. Schliesslich gelangen in zwangloser Folge *zusammenfassende Berichte* über die Fortschritte einzelner Sondergebiete, die in rascher Entwicklung begriffen sind, mit ausführlichen Literaturangaben zum Abdruck.

Erscheint ab Jahrgang III (1952) im  
VERLAG BIRKHÄUSER BASEL

---

*Zu beziehen durch jede Buchhandlung*